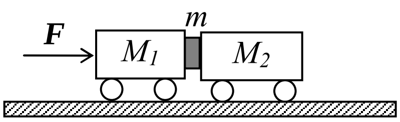
25. MIKOLA SÁNDOR ORSZÁGOS TEHETSÉGKUTATÓ FIZIKAVERSENY 2. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

1. Elhanyagolható súrlódással mozgó kiskocsik közé m = 100 g tömegű korong szorult. A kocsik tömege M_1 = 300 g és M_2 = 400 g, a tapadási súrlódási tényező a korong és a kocsik között μ_o = 0,4.

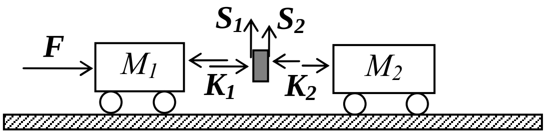
a) Mekkora állandó nagyságú, vízszintes irányú erővel kell a rendszert balról jobbra tolni ahhoz, hogy a korong ne csússzon le?

b) Vajon más nagyságú erő kell-e, ha jobbról balra mozgatjuk a kocsikat? Válaszát indokolja!



(Varga István, Békéscsaba)

Megoldás:



a)

A rendszer gyorsulása: $a = \dfrac{F}{M_1 + M_2 + m}$

A testek közötti belső erők: $K_1 = (m + M_2) \cdot a \quad \textit{és} \quad K_2 = M_2 \cdot a$

A korongot megtartó súrlódási erők: $S_1 \le \mu_o \cdot K_1 \quad \textit{és} \quad S_2 \le \mu_o \cdot K_2$

A korong nem esik le, ha: $mg = S_1 + S_2 \le \mu_0 \cdot (K_1 + K_2)$

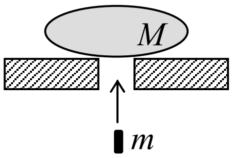
Behelyettesítések után: $mg \le \mu_0 \cdot \dfrac{m + 2 \cdot M_2}{M_1 + M_2 + m} \cdot F$

Innen kapjuk a szükséges erőt: $F_{bal} \ge \dfrac{mg}{\mu_0} \cdot \dfrac{M_1 + M_2 + m}{m + 2 \cdot M_2} = \underline{\underline{2{,}18 N}}$

b) Ha a rendszert jobb oldalról toljuk:

$$F_{jobb} \ge \frac{mg}{\mu_0} \cdot \frac{M_1 + M_2 + m}{m + 2 \cdot M_1} > F_{bal} \quad mivel \quad M_1 < M_2$$

2. M = 0,5 kg tömegű test nyugszik egy asztalon vágott nyíláson. Ezt a testet egy m = 20 g tömegű lövedékkel alulról függőlegesen felfelé átlőjük. A lövedék v = 50 m/s sebességgel érkezik a test alsó felületéhez, majd a tömegközéppontján keresztül távozik, és a kilépés helyétől h = 3,2 m magasra emelkedik. Mekkorát ugrik az M tömegű test? (A két test közötti kölcsönhatást pillanatszerűnek tekinthetjük. Számoljunk $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$-tel!)



(Holics László, Budapest)

<u>Megoldás</u>:

A kölcsönhatás közben a mechanikai energia nem marad meg, viszont, mivel a kölcsönhatás pillanatszerű, a rendszer a kölcsönhatás ideje alatt *zárt rendszernek* tekinthető, így a lendület a *kölcsönhatás alatt* megmarad:

$$mv = mu + MU,$$

ahol u a lövedék, U a kezdetben nyugvó test sebessége a kölcsönhatás után. A nagy test emelkedésének a magasságát keressük, ami

$$H = \frac{U^2}{2g}$$

összefüggéssel határozható meg, ahol

$$U = \frac{m(v-u)}{M}.$$

Az itt szereplő u, a nagy testből kilépő kis test kezdősebessége az emelkedésének magasságából határozható meg:

$$u = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} \cdot 3{,}2\ \mathrm{m}} = 8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Így a nagy test kezdősebessége:

$$U = \frac{m\left(v - \sqrt{2hg}\right)}{M} = \frac{0{,}02\ \mathrm{kg}}{0{,}5\ \mathrm{kg}}(50-8)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1{,}68\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A lövés következtében a test

$$H = \left(\frac{m\left(v-\sqrt{2gh}\right)}{M}\right)^2 \frac{1}{2g} = \frac{\left(1{,}68\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}} = 0{,}141\ \mathrm{m} \approx \mathbf{14\ cm}$$

magasra ugrik fel.

25. MIKOLA SÁNDOR ORSZÁGOS TEHETSÉGKUTATÓ FIZIKAVERSENY 2. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

3. Egyenletes forgómozgást végző körhinta percenként 12 fordulatot tesz meg. Egy 8 kg tömegű majom a forgástengelytől 5 méter távolságban ül az egyik sugár irányú tartórúdon, majd lassan beljebb mászik 3 méterrel.

a) Mennyi munkát végez a majom saját magán?

b) Mennyi munkát végez eközben a tartórúd a majmon?

(Szkladányi András, Baja)

Megoldás:

a) A majomnak erőt kell kifejtenie ahhoz, hogy beljebb másszon a tartórúdon, amelynek sugár irányban befelé mutató komponense a centripetális erővel egyenlő nagyságú, tehát függ a tengelytől mért távolságtól:

$$F = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

ahol $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot \frac{12}{60} = \frac{2}{5} \cdot \pi \frac{1}{s}$

Ennek a lineárisan változó erőnek a munkája kiszámítható pl. az erőfüggvény alatti területből, vagy az átlagos erőből:

$$W_{majom} = m \cdot \omega^2 \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot (r_1 - r_2) = \frac{m}{2} \cdot \omega^2 \cdot \left(r_1^2 - r_2^2\right), \quad \text{ahol } r_1 > r_2$$

Adatokkal: $\underline{\underline{W_{majom} = 132{,}65\,J}}$

b) A munkatétel szerint (mivel a körhinta szögsebessége és így forgási energiája nem változik) a majom mozgási energiájának változása egyenlő a majom munkájának és a körhinta által a majomra kifejtett erő munkájának összegével:

$$\Delta E_{majom} = W_{majom} + W_{hinta}$$

A majom mozgási energiájának változása:

$$\Delta E_{majom} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot \left(r_2^2 - r_1^2\right) = -W_{majom}$$

emiatt: $\underline{\underline{W_{hinta} = -2 \cdot W_{majom} = -265{,}3\,J}}$

<u>Megjegyzés:</u> Fizikai értelemben, szigorúan véve, a majom valójában nem végez munkát önmagán (W_{majom}=0), hiszen nem saját magára fejt ki erőt, hanem a rúdra. A rúd által a majomra kifejtett erő viszont felbontható egy sugár és egy érintő irányú komponensre. A sugár irányú komponens által a majmon végzett munka megegyezik a fenti gondolatmenetben a majomnak tulajdonított munkával. Az érintő irányú komponens munkája pedig az előző megoldásban W_{hinta}-val jelölt mennyiség (a hinta fékezi a majom érintő irányú mozgását). Végeredményben tehát mindkét gondolatmenettel arra jutunk, hogy a majom mozgási energiája csökken (a körhinta mozgási energiája az egyenletes forgást biztosító motor révén állandó marad). A fenti megoldás elfogadását az indokolja, hogy a fizikában is gyakran az „aktív"-nak nevezhető személynek tulajdonítjuk a munkavégzést az olyan esetekben, mint például amikor valaki felmegy egy kilátóba, vagy felmászik egy kötélen. Ilyen esetekben is arról van szó, hogy az illető erőt fejt ki egy másik testre (lépcső, vagy kötél), az pedig a hatás-ellenhatás törvénye értelmében ugyanakkora, de ellentétes irányú erővel hat rá, és végez rajta (fizikai értelemben vett) munkát.

4. Egy 1 kg tömegű helikoptermodell függőleges tengelyű propellerének átmérője 0,4 m. Legalább mekkora hasznos teljesítménnyel kell működtetni ezt a propellert ahhoz, hogy a gép állandó magasságban lebegjen? A levegő sűrűsége 1,3 kg/m^3, a helikopterre ható közegellenállási erő az összsúly 10 százaléka. A propeller által mozgatott levegő áramlási sebességét a propeller által súrolt teljes felületen vegyük állandónak.

(Suhajda János, Kiskőrös)

Megoldás:

A propeller révén biztosított emelő erőnek a nehézségi erőn kívül a lefelé mozgásba hozott levegő által a helikoptertestre kifejtett közegellenállási erőt is ellensúlyoznia kell, ezért:

$$F_p = 1{,}1 \cdot m \cdot g$$

A propeller forgása miatt függőlegesen lefelé áramló levegő által kifejtett emelő erő:

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\Delta(m \cdot v)}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot v$$

ahol v a mozgásba hozott levegő sebessége,

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} = \rho \cdot A \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \rho \cdot A \cdot v$$

és $A = R^2 \cdot \pi$ a propeller által súrolt terület.

Behelyettesítés után:

$$\rho \cdot A \cdot v^2 = 1{,}1 \cdot m \cdot g\,, \quad \text{ahonnan} \quad v = \sqrt{\frac{1{,}1 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot A}}$$

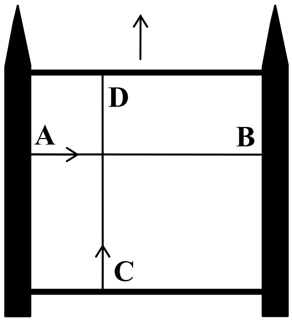
A propeller teljesítménye:

$$P_h = F_p \cdot \frac{v}{2} = \frac{1{,}1}{2} \cdot m \cdot g \cdot \sqrt{\frac{1{,}1 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot A}} = \frac{1{,}1}{2} \cdot m \cdot g \cdot \sqrt{\frac{1{,}1 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot R^2 \cdot \pi}} = \frac{1{,}1}{2} \cdot \frac{m \cdot g}{R} \cdot \sqrt{\frac{1{,}1 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot \pi}}$$

Az adatok behelyettesítése után (g = 10 m/s^2):

$$\underline{\underline{P_h = 45{,}15\,W}}$$

5. A fizika évében különleges úszóversenyt rendeznek. Egy 50 m oldalú, négyzet alakú keretet két hajótest mozgat egy tavon a négyzet egyik oldalával párhuzamos, állandó nagyságú sebességgel. Két, egyforma gyors úszó versenyez. Egyikük az A pontból a szemközti B-t érintve visszatér az A pontba. A másik a C pontból indul és a szemben lévő D-t érintve jut vissza C-be. Melyik úszó ér előbb célba és mennyivel, ha egyszerre indultak és a legrövidebb idő alatt teszik meg a távokat? Az úszók sebessége 0,3125 m/s, a kereté pedig 0,1875 m/s? Az úszók esetleges találkozásával ne foglalkozzunk!



(Kiss Miklós, Gyöngyös)

<u>Megoldás</u>:

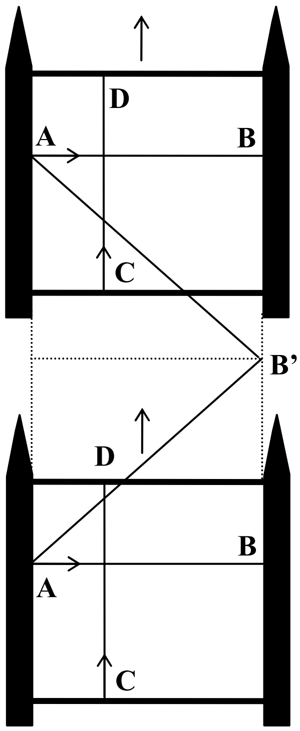
Az A pontból induló úszónak a hajó mozgásirányába B' pont felé ferdén kell haladnia, mivel a B pont mozog.

Ha t idő alatt ér a B pontba, akkor Pitagorasz tétele szerint:

$$(v\cdot t)^2 = (w\cdot t)^2 + d^2$$

ahol v az úszó, w a hajó sebessége, d a keret oldalhossza. Az út visszafelé ugyanannyi ideig tart, ezért az összes ideje:

$$t_A = 2\cdot t = \frac{2\cdot d}{\sqrt{v^2 - w^2}} = \underline{\underline{400\ s}}$$



A másik úszónak a hajóval azonos irányban többet, visszafelé kevesebbet kell úsznia, mint a keret hossza:

$$v\cdot t_1 = d + w\cdot t_1$$

$$v\cdot t_2 = d - w\cdot t_2$$

Ebből $t_B = t_1 + t_2 = \dfrac{2\cdot d\cdot v}{v^2 - w^2} = \underline{\underline{500\ s}}$

Tehát az első úszó 100 másodperccel előbb ér célba.

6. Jégpályán, egymástól 1,5 m távolságban lévő egyenesek mentén, egymás felé halad a 40 kg tömegű András 3 m/s sebességgel és a 60 kg tömegű Bence 2 m/s sebességgel. Amikor legközelebb vannak egymáshoz, karjukkal összekapaszkodnak.

a) Milyen mozgást végeznek ezután a fiúk tömegközéppontjai? Adjuk meg a pályák jellemzőit!
b) Mekkora erőt fejtenek ki egymásra?
c) Egyszer csak elengedik egymást. Milyen távol lesznek egymástól 1 másodperc múlva?

(Simon Péter, Pécs)

Megoldás:

a) Az összekapaszkodás előtt azonos nagyságú, ellentétes irányú lendületekkel rendelkeznek a testek, ezért az összekapaszkodás után a gyerekek tömegközéppontjai a rendszer nyugalomban lévő tömegközéppontja körül, kezdeti sebességüket megőrizve, egyenletes körmozgást végeznek.

A rendszer tömegközéppontja a két gyermek tömegközéppontja közötti szakaszt a tömegükkel fordított arányban osztja, ezért a szóban forgó körpályák sugara:

- András esetén $R_A = 0{,}9$ m,
- Bence esetén $R_B = 0{,}6$ m.

b) Az egyenletes körmozgáshoz szükséges erőt a gyerekek fejtik ki egymásra:

$$F = m_A \cdot \frac{v_A^2}{R_A} = m_B \cdot \frac{v_B^2}{R_B} = \underline{\underline{400\ N}}$$

c) Miután a kezüket elengedték, a két gyermek egymástól 1,5 m távolságban lévő két egyenes mentén távolodik egymástól. Távolságuk egy másodperc múlva a Pitagorasz-tétel szerint:

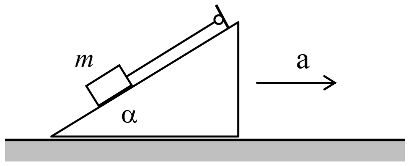
$$d = \sqrt{(1{,}5\ m)^2 + \left[\left(2\frac{m}{s} + 3\frac{m}{s}\right)\cdot 1\ s\right]^2} = \underline{\underline{5{,}22\ m}}$$

25. MIKOLA SÁNDOR ORSZÁGOS TEHETSÉGKUTATÓ FIZIKAVERSENY 2. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

7. Egy $\alpha = 30^{o}$ hajlásszögű lejtőn lévő, m = 1,8 kg tömegű testet a lejtővel párhuzamos fonállal a lejtő felső végéhez rögzítünk. Ezután a lejtőt vízszintes irányba állandó gyorsulással mozgatni kezdjük. A súrlódás elhanyagolható.

a) Mekkora a gyorsulás, ha a test $\frac{3}{4}mg$ erővel nyomja a lejtőt?

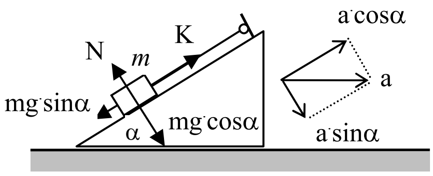
b) Hogyan kell méreteznünk a fonalat, hogy az ne szakadjon el?



(Kotek László, Pécs)

Megoldás:

a)



Vegyük fel az m tömegű testre ható erőket, és bontsuk fel az a gyorsulást a lejtőre merőleges és azzal párhuzamos komponensekre!

A mozgásegyenletek:

$$ma\cos\alpha = K - mg\sin\alpha \quad (1)$$

$$ma\sin\alpha = mg\cos\alpha - N \quad (2)$$

Az $N = \frac{3}{4}mg$ feltételt felhasználva (2)-ből:

$$ma\sin\alpha = mg\cos\alpha - \frac{3}{4}mg$$

$$\boxed{a = \frac{4\cos\alpha - 3}{4\sin\alpha}\cdot g = 2{,}32\ \frac{m}{s^2}}$$

b) A gyorsulás értékét (1)-be beírva:

$$K = ma\cos\alpha + mg\sin\alpha$$

$$K = \frac{4\cos^2\alpha - 3\cos\alpha}{4\sin\alpha}\cdot mg + mg\sin\alpha$$

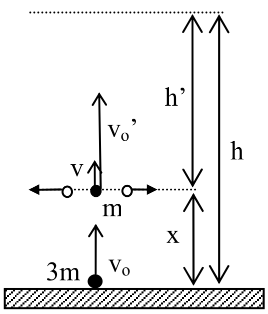
$$\boxed{K = \frac{4 - 3\cos\alpha}{4\sin\alpha}\cdot mg = 12{,}6\ N}$$

25. MIKOLA SÁNDOR ORSZÁGOS TEHETSÉGKUTATÓ FIZIKAVERSENY 2. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

8. Egy gránátot indítunk függőlegesen felfelé 100 m/s kezdősebességgel. Bizonyos magasságban három egyenlő darabra robban. Két darab a robbanás után vízszintesen indul, a harmadik függőlegesen folytatja útját. Milyen magasan történt a robbanás, ha a függőlegesen mozgó rész a robbanás nélküli magasság háromszorosára emelkedik? A közegellenállás hatását hagyjuk figyelmen kívül! Számoljunk g = 10 m/s^2-tel!

(Koncz Károly, Pécs)

Megoldás:



A robbanás nélküli legnagyobb magasság (h_o):

$$\frac{1}{2}\cdot 3mv_o^2 = 3mgh_o \quad \Rightarrow \quad h_o = \frac{v_o^2}{2g} = 500\ m$$

A feltétel szerint a robbanás után a függőlegesen induló darab által elért legnagyobb magasság:

$$h = 3\cdot h_o = 1500\ m$$

Legyen x a robbanás magassága, v pedig a lövedék sebessége a robbanás előtti pillanatban. Mivel a közegellenállás elhanyagolható, a mechanikai energia a robbanás pillanatáig megmarad:

$$\frac{1}{2}\cdot 3mv_o^2 = 3mgx + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = v_o^2 - 2gx$$

A robbanás rövid időtartama alatt a nehézségi erő lendületváltoztató hatása szintén elhanyagolható, ezért alkalmazható a lendület megmaradás törvénye (v_o' a függőlegesen induló, m tömegű darab sebessége a robbanást követő pillanatban):

$$3mv = mv_o' \quad \Rightarrow \quad v_o' = 3v$$

Az ábra alapján: $h = x + h' \quad \Rightarrow \quad 3h_o = x + \dfrac{v_o'^2}{2g}$

Ebbe az egyenletbe behelyettesítve a korábbi összefüggéseket:

$$3\cdot\frac{v_o^2}{2g} = x + 9\cdot\frac{v_o^2 - 2gx}{2g}$$

Az egyenletet megoldva: $\boxed{x = \dfrac{3v_o^2}{8g} = 375\ m}$

9. A talaj szintjén elhelyezett kilövőszerkezetből, a vízszintessel 30°-os szöget bezáró kezdősebességgel indított 0,2 kg tömegű lövedék egy 1,2 kg tömegű, nyugvó kiskocsi platójának közepére esik és odatapad. A kocsi 50 cm hosszú, 30 cm magas, a gördülési súrlódási tényező 0,05. (A pillanatszerű ütközés alatt a gördülési súrlódás hatása elhanyagolható.)
a) Mekkora a lövedék kezdősebessége, ha a kocsi a vízszintes talajon 1 m utat tesz meg?
b) Mekkora távolságra van a kiskocsi a kilövőszerkezettől?
c) A 30°-os szögben rögzített kilövőszerkezet és az előbbi kezdősebesség esetén megoldható-e, hogy egy 70 cm magas és 2 m hosszú kocsinak is a közepére essen a lövedék? (Ha igen hogyan; ha nem, miért nem?)

(Mező Tamás, Szeged)

Megoldás:

a) A munkatétel szerint a kocsi és a lövedék együttes kezdeti sebessége:

$$0-\frac{1}{2}m_ö\cdot v^2=-\mu\cdot m_ö\cdot g\cdot s \qquad v=1\frac{m}{s}$$

A tökéletesen rugalmatlan ütközésre a lendület megmaradás törvényéből a lövedék vízszintes sebességkomponense, illetve kezdősebessége:

$$m_l\cdot v_{0x}=\left(m_l+m_k\right)\cdot v \qquad v_{0x}=7\frac{m}{s} \qquad v_0=\frac{v_{0x}}{\cos\alpha}\approx 8{,}08\frac{m}{s}$$

b) A ferde hajítás kinematikai vizsgálatából a keresett távolság:

$$h=v_0\cdot\sin\alpha\cdot t-\frac{g}{2}\cdot t^2 \qquad (t_1=0{,}083s) \qquad t_2=0{,}725s$$ csak t_2 a helyes (leszálló ág)

$$x=v_0\cdot\cos\alpha\cdot t\approx 5{,}08m \qquad x=d+\frac{l}{2}\Rightarrow d\approx 4{,}83m$$

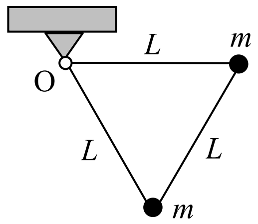
c) A 2 m hosszú és 70 cm magas kocsi esetében a b) szerinti gondolatmenet újra alkalmazható. A 0,7 m-es magasságban a „felszálló ágban” 0,252 s, a „leszálló ágban” 0,556 s-mal az „elhajítás” után van a lövedék.

Ezekből szintén a b) szerint adódik, hogy **megvalósítható a kitűzött cél**:
A kocsinak a kilövőszerkezettől kb. 2,89 m-re kell lennie (x’=3,89m), és ekkor a felszálló ágban még bőven „elfér” a lövedék a kocsi kilövőszerkezethez közelebbi vége mellett (vízszintesen mérve kb. 1,13 m-rel a kocsi sarka mellett repül el a lövedék).

10. Elhanyagolható tömegű, L = 40 cm hosszú rudakból és két, m = 100 g tömegű, pontszerűnek tekinthető golyóból merev szerkezetet állítunk össze. A szerkezetet, amely az O felfüggesztési ponton átmenő vízszintes tengely körül súrlódásmentesen foroghat, az ábrán vázolt helyzetig kitérítjük, majd elengedjük.

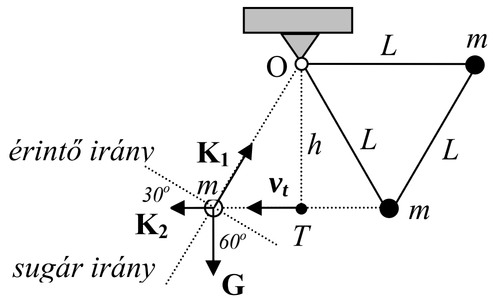
a) Mekkora lesz a szerkezet tömegközéppontjának legnagyobb sebessége?

b) Mekkora erők ébrednek ekkor a rudakban?



(†Szegedi Ervin, Debrecen)

Megoldás:



a) A tömegközéppont sebessége akkor maximális, amikor pályájának legalsó pontjához ér, tehát éppen az O pont alatt helyezkedik el. Ekkor az m tömegű testeket összekötő rúd vízszintes helyzetű. A testek sebessége az energia megmaradás törvénye alapján határozható meg:

$$mgh = 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2 \quad ahol \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2} L \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gL\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1{,}86 \frac{m}{s}$$

A tömegközéppont sebessége rendszer szögsebességének felhasználásával határozható meg:

$$\omega = \frac{v}{L} \quad \Rightarrow \quad v_t = \omega \cdot h = v \cdot \frac{h}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2} v = \underline{\underline{1{,}6 \frac{m}{s}}}$$

b) Ebben a pillanatban a testek érintő irányú gyorsulása nulla, tehát az érintő irányú erőkomponensek kiegyenlítik egymást:

$$K_2 \cdot \cos 30^o = G \cdot \cos 60^o$$

Ebből az egyenletből a vízszintes rúdban ható erő meghatározható:

$$K_2 = G \cdot \frac{\cos 60^o}{\cos 30^o} = \frac{mg}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{0{,}577\,N}}$$

A sugár irányú erőkomponensek eredője a tömeg és a centripetális gyorsulás szorzatával egyenlő:

$$K_1 - K_2 \cdot \sin 30^o - G \cdot \sin 60^o = m \cdot \frac{v^2}{L}$$

Innen a ferde rudakban ébredő erő nagysága:

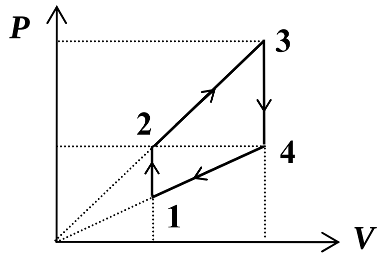
$$K_1 = m \cdot \frac{gL\frac{\sqrt{3}}{2}}{L} + \frac{mg}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} + mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{6} mg = \underline{\underline{1{,}98\,N}}$$

25. MIKOLA SÁNDOR ORSZÁGOS TEHETSÉGKUTATÓ FIZIKAVERSENY 2. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

11. Mobiltelefonon az ábrán látható MMS képüzenetet kaptuk. A szöveges részben közölték, hogy a képen 0,3 mol anyagmennyiségű ideális gáz körfolyamata látható, amelynek hőmérséklete az 1. állapotban $T_1 = \frac{800}{3}$ K, a 3. állapotban T_3 = 900 K. SMS-ben a következő kérdésekre kell felelni:

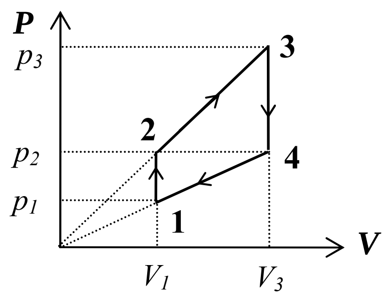
a) Mekkora a gáz hőmérséklete a 2. és a 4. állapotban?

b) Mennyi hasznos munkát végez a gáz a körfolyamat egy ciklusa alatt?



(Kotek László, Pécs)

<u>Megoldás</u>:



a) Az ábra jelöléseit alkalmazva Gay-Lussac I. és II. törvénye alapján:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad \textit{és} \quad \frac{V_3}{V_1} = \frac{T_4}{T_2}$$

Mivel az 1. és 4. állapotokat összekötő szakasz meghosszabbítása átmegy az origón, ezért

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_3}{V_1}$$

Ezekből: $$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_4}{T_2} \quad \Rightarrow \quad T_2 = \sqrt{T_1 \cdot T_4}$$

Hasonlóan belátható, hogy $T_4 = \sqrt{T_2 \cdot T_3}$,

amit az előző egyenletbe behelyettesítve:

$$T_2 = \sqrt{T_1 \sqrt{T_2 \cdot T_3}}\text{, ahonnan } \boxed{T_2 = \sqrt[3]{T_1^2 \cdot T_3} = 400\,K} \quad \text{és} \quad \boxed{T_4 = \sqrt{T_2 \cdot T_3} = 600\,K}$$

b) A hasznos munkát a körbezárt terület alapján számolhatjuk:

$$W_h = \frac{(p_2 - p_1) + (p_3 - p_2)}{2} \cdot (V_3 - V_1) = \frac{(p_3 - p_1)}{2}(V_3 - V_1) = \frac{p_3 V_3 + p_1 V_1 - p_1 V_3 - p_3 V_1}{2}$$

Az állapotegyenlet többszöri felhasználásával:

$$W_h = \frac{1}{2} nR(T_3 + T_1 - T_2 - T_4)$$

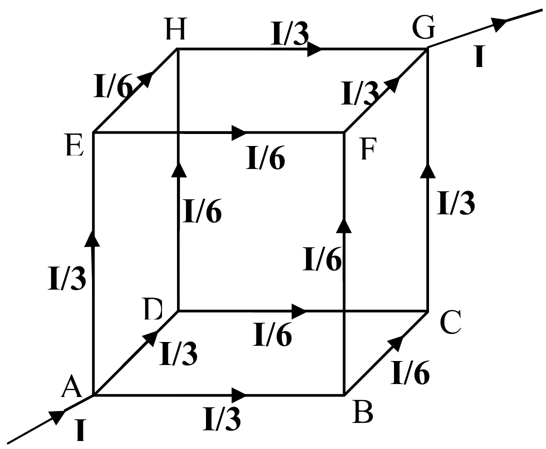
Az adatokat behelyettesítve: $\boxed{W_h = 207{,}85\,J}$

12. Pisti talált egy fémdrótból készült, kocka alakú vázat. Szerette volna meghatározni a drót anyagi minőségét. A kocka két átellenes csúcsát rákapcsolta egy univerzális mérőműszerre, amely 12,21 mΩ ellenállást jelzett. A kocka éleit 10 cm hosszúnak, a hengeres drót átmérőjét pedig 1 mm-nek mérte. Egy kis gondolkodás és számolás után függvénytáblázata segítségével rájött, hogy valószínűleg milyen anyagból készült a fémdrót. Hogyan? Mit kapott eredményül?

(Szkladányi András, Baja)

Megoldás:

Pisti gondolatmenete például a következő lehetett. A műszer által mutatott érték a kocka alakú fémváz eredő ellenállása két átellenes csúcsa (pl. A és G) között. Ez az eredő ellenállás úgy is kiszámítható, ha meggondoljuk, mi történik, amikor erre a két csúcsára áramforrást kapcsolunk. Szimmetria okokból és a csomóponti törvény miatt a fémvázban az ábrán látható árameloszlás jön létre:



A kocka éleinek ellenállása a feltételek miatt egyenlő (R_1), ezért például az ABCG útvonal alapján:

$$U_{AG} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CG} = \frac{I}{3}R_1 + \frac{I}{6}R_1 + \frac{I}{3}R_1 = \frac{5}{6}IR_1$$

A kockaváz eredő ellenállása Ohm törvénye alapján:

$$R_e = \frac{U_{AG}}{I} = \frac{5}{6}R_1 \quad ahonnan \quad R_1 = \frac{6}{5}R_e = 14{,}65\,m\Omega$$

A huzalok ellenállására vonatkozó összefüggést felhasználva a kockaváz anyagának fajlagos ellenállása:

$$\rho = \frac{R_1 \cdot A}{l} = \frac{R_1 \cdot r^2\pi}{l} = \underline{\underline{1{,}15 \cdot 10^{-7}\,\Omega m}}$$

A kockaváz tehát valószínűleg ónból készült.

25. MIKOLA SÁNDOR ORSZÁGOS TEHETSÉGKUTATÓ FIZIKAVERSENY 2. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

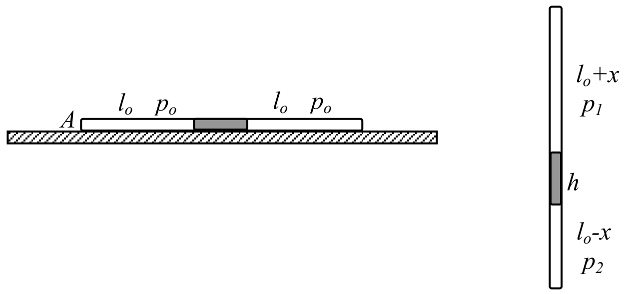
13. Kis belső keresztmetszetű, vízszintes cső mindkét vége zárt, teljes hossza 1 m. A cső közepén 20 cm hosszú, folytonos higanyszál van. A csőben lévő levegő nyomása mindkét oldalon 48 cm magas higanyoszlop hidrosztatikai nyomásával egyenlő. Állandó hőmérsékleten a csövet lassan függőleges helyzetbe hozzuk.

a) Számítsa ki, hogy mennyit mozdul el a higanyszál!

b) Tegyük fel, hogy a hőmérséklet lassan csökkenni kezd. Merre fog elmozdulni a higanyszál? Válaszát indokolja!

(Varga István, Békéscsaba)

<u>Megoldás</u>:



a) A feladat szerint $p_o = \rho \cdot g \cdot H$, ahol ρ a higany sűrűsége, $H = 48cm$. Ha a csövet elfordítjuk függőleges helyzetbe, akkor a két levegőoszlop nyomása közötti kapcsolat a következő lesz:

$$p_2 = p_1 + \rho \cdot g \cdot h \qquad (h = 20cm)$$

Mindkét levegőoszlop állapotváltozására alkalmazhatjuk a Boyle-Mariotte törvényt:

$$p_o \cdot A \cdot l_o = p_1 \cdot A \cdot (l_o + x) \quad \textit{és} \quad p_o \cdot A \cdot l_o = p_2 \cdot A \cdot (l_o - x)$$

Kifejezve p_1 és p_2 nyomásokat és behelyettesítve a kapcsolatukat leíró egyenletbe:

$$\frac{p_o \cdot l_o}{l_o - x} = \frac{p_o \cdot l_o}{l_o + x} + \rho \cdot g \cdot h \quad \text{majd átrendezve} \quad x^2 + 2\frac{H}{h} l_o \cdot x - l_o^2 = 0$$

Mivel $x < l_o$, ezért a megoldás: $x = l_o\left(\sqrt{1+\left(\frac{H}{h}\right)^2} - \frac{H}{h}\right) = 40 \cdot \left(\sqrt{1+\left(\frac{48}{20}\right)^2} - \frac{48}{20}\right) = \underline{\underline{8cm}}$

b) Jelölje y a higanyszál elmozdulását az új $T_2 < T_1$ hőmérsékleten. Ekkor az új nyomások közötti kapcsolat az előbbihez hasonló gondolatmenet után (az egyesített gáztörvény felhasználásával):

$$\frac{p_o \cdot l_o}{l_o - y} \cdot \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_o \cdot l_o}{l_o + y} \cdot \frac{T_2}{T_1} + \rho \cdot g \cdot h$$

A megoldás hasonlóképpen: $y^2 + 2\frac{H}{h} \cdot \frac{T_2}{T_1} \cdot l_o \cdot y - l_o^2 = 0$ ahonnan $y = l_o\left(\sqrt{1+\left(\frac{H}{h} \cdot \frac{T_2}{T_1}\right)^2} - \frac{H}{h} \cdot \frac{T_2}{T_1}\right)$

Az elmozdulásokra kapott összefüggéseket átalakítva:

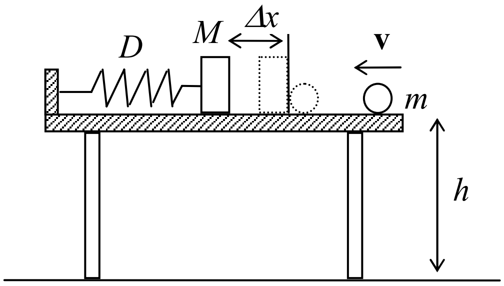
$$x = \frac{l_o}{\sqrt{1+\left(\frac{H}{h}\right)^2} + \frac{H}{h}} \quad \textit{és} \quad y = \frac{l_o}{\sqrt{1+\left(\frac{H}{h} \cdot \frac{T_2}{T_1}\right)^2} + \frac{H}{h} \cdot \frac{T_2}{T_1}}$$

A második tört nevezője $T_2 < T_1$ miatt kisebb, így *y*>*x*. A higany tehát lefelé mozdul.

b) <u>Második megoldás</u>: Ha a higany nem mozdulna el, akkor a levegőoszlopok állapotváltozása izochor folyamat lenne. Ekkor a két nyomásváltozás $\Delta p_2 = p_2 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)$ *és* $\Delta p_1 = p_1 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)$ volna.

Mivel $p_2 > p_1$ és $T_2 < T_1$, ezért $\Delta p_2 < \Delta p_1 < 0$ lenne. A higany tehát lefelé mozdul.

14. Egy h = 0,8 m magas, vízszintes asztallapon a D = 960 N/m direkciós erejű, baloldali végén rögzített rugóhoz M = 0,15 kg tömegű testet erősítünk. A rugót Δx = 0,1 m-rel összenyomjuk és úgy engedjük el, hogy az M tömegű test a vele szemben v = 8 m/s sebességgel haladó m tömegű testtel éppen akkor ütközzön, amikor a rugó nyújtatlan. A súrlódás elhanyagolható, az ütközés teljesen rugalmasnak tekinthető.
a) Mekkora legyen az m tömeg, hogy az ütközés után az asztal széléről lerepülve a test a legtávolabb érjen talajt?
b) Mekkora ez a távolság?



(Pálovics Róbert, Zalaegerszeg)

Megoldás:

a) Legyen a M tömegű test sebessége az ütközés előtt V. Mivel az ütközés a rugó nyújtatlan állapotában történik, ezért:

$$\frac{1}{2}D(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}MV^2 \quad \Rightarrow \quad V = 8\frac{m}{s}$$

A két test sebességének nagysága tehát megegyezik, iránya pedig ellentétes az ütközés pillanatában $(v = -V)$. A m tömegű test sebessége az ütközés után akkor lesz a legnagyobb, ha az ütközés során a M tömegű test megáll (ezzel teljes energiáját átadva).
Mindezek figyelembevételével írjuk fel a lendület és a mozgási energia megmaradására vonatkozó egyenleteket:

$$MV - mV = mu$$

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mu^2$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$m = \frac{M}{3} = \underline{\underline{0{,}05\,kg}} \quad \text{és} \quad u = 2V = 16\frac{m}{s}$$

b) A m tömegű test az asztalt elhagyva vízszintes hajítást végez $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}4\,s$ ideig, így

$$s = u \cdot t = \underline{\underline{6{,}4\,m}}$$

távolságra ér talajt az asztal szélétől.

25. MIKOLA SÁNDOR ORSZÁGOS TEHETSÉGKUTATÓ FIZIKAVERSENY 2. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

15. Egy bolygót 24 óra alatt kerüli meg az egyik kisméretű holdja, egy másik, hasonlóan kicsiny hold 81 óra alatt (Földi időben). A második hold két és félszer messzebb van a bolygó felszínétől, mint az első. Mekkora a bolygó anyagának átlagos sűrűsége, ha a holdak körpályán keringenek?

(Kiss Miklós, Gyöngyös)

Megoldás:

A holdakat a gravitáció tartja körpályán: $\gamma\frac{Mm}{r^2} = mr\omega^2$ (*M* a bolygó, *m* a hold tömege).

Ha egy test bolygó közelben keringene (*r*=*R*), akkor $\gamma\frac{Mm}{R^2} = mR\omega^2$ (*R* a bolygó sugara).

A szögsebességet behelyettesítve és *m*-mel osztva: $\gamma\frac{M}{R^3} = \frac{4\pi^2}{T^2}$.

Felhasználva a gömb térfogatképletét átalakítások után az átlagos sűrűség: $\overline{\rho} = \frac{3\pi}{\gamma\cdot T^2}$

A bolygó közeli test keringési idejét kell még meghatározni. Kepler III. törvénye alapján:

$\frac{(R+2{,}5h)^3}{(R+h)^3} = \frac{T_2^2}{T_1^2}$, ahol *h* a bolygó felszínétől mért távolsága a közelebbi holdnak.

Ha figyelembe vesszük a keringési idők értékét, akkor $\frac{R+2{,}5h}{R+h} = \frac{9}{4}$ és $h = 5R$.

Ezzel a bolygó közeli test keringési idejére: $\frac{(R)^3}{(6R)^3} = \frac{T^2}{T_1^2} \quad\Rightarrow\quad T^2 = \frac{(24\,óra)^2}{216}$.

A bolygó átlagsűrűsége tehát: $$\overline{\rho} = \frac{648\cdot\pi}{\gamma\cdot(24\cdot3600s)^2} = \underline{\underline{4089\frac{kg}{m^3}}}$$

2. megoldás:

A feltétel szerint: $\frac{r_2 - R}{r_1 - R} = 2{,}5$ (r_1 és r_2 a holdak pályasugarai)

A holdakat a gravitációs kölcsönhatás tartja körpályán: $\gamma\cdot\frac{mM}{r^2} = mr\omega^2 \quad\Rightarrow\quad r = \sqrt[3]{\gamma\cdot\frac{M}{\omega^2}}$

Behelyettesítve az előbbi egyenletbe: $$\frac{\sqrt[3]{\gamma\cdot\frac{M}{\omega_2^2}} - R}{\sqrt[3]{\gamma\cdot\frac{M}{\omega_1^2}} - R} = 2{,}5 \quad\Rightarrow\quad R = \sqrt[3]{\gamma\cdot M}\cdot\frac{\sqrt[3]{\frac{2{,}5^3}{\omega_1^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{\omega_2^2}}}{1{,}5}$$

A bolygó átlagsűrűsége: $\overline{\rho} = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}R^3\pi}$ (ahol *R* a bolygó sugara)

A bolygó sugarára kapott eredményt felhasználva és figyelembe véve, hogy $\omega = \frac{2\pi}{T}$ kapjuk:

$$\overline{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{\gamma\cdot M}}{1{,}5}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{2{,}5^3}{\omega_1^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{\omega_2^2}}\right)\right)^3} = \frac{3M}{\frac{4\pi\cdot\gamma\cdot M}{1{,}5^3}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{2{,}5^3}{\omega_1^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{\omega_2^2}}\right)^3} = \frac{3\cdot1{,}5^3}{4\pi\cdot\gamma\cdot\left(\sqrt[3]{2{,}5^3\cdot\frac{T_1^2}{4\pi^2}} - \sqrt[3]{\frac{T_2^2}{4\pi^2}}\right)^3}$$

Az adatokat behelyettesítve: $\overline{\rho} = \underline{\underline{4089\frac{kg}{m^3}}}$

25. MIKOLA SÁNDOR ORSZÁGOS TEHETSÉGKUTATÓ FIZIKAVERSENY 2. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

16. m_1 tömegű és t_1 hőmérsékletű, termoszban lévő vízhez m_2 tömegű és t_2 hőmérsékletű melegebb vizet öntöttünk. A termikus egyensúly beállta után megmértük a víz hőmérsékletét. Ezután, kíváncsiságból, fordítva jártunk el: a termoszban lévő m_2 tömegű és t_2 hőmérsékletű vízhez öntöttük az m_1 tömegű és t_1 hőmérsékletű hidegebb vizet. Meglepetéssel tapasztaltuk, hogy az egyensúlyi hőmérséklet más lett, mint az első esetben.
a) Mivel magyarázható ez az eltérés? Gondolatmenetét igazolja számítással is!
b) Tudjuk, hogy a két egyensúlyi hőmérséklet 1,9 ^oC-kal különbözött egymástól. Mire következtethetünk ebből?
Adatok: $m_1 = 300$ g, $t_1 = 20$ ^oC, $m_2 = 600$ g, $t_2 = 80$ ^oC, $c_{víz} = 4183$ J/kg ^oC.

(Kopcsa József, Debrecen)

<u>Megoldás</u>:

a) A két termikus egyensúlyi hőmérséklet azért különbözik egymástól, mert a termosznak C hőkapacitása van. Akkor mérünk magasabb egyensúlyi hőmérsékletet, ha a termoszban helyezzük el a melegebb vizet.

A gondolatmenet igazolása:
Jelölje a két esetben az egyensúlyi hőmérsékleteket t' (ha a termoszban kezdetben a hidegebb víz van) és t'' (amikor a melegebb), különbségüket pedig $\Delta t = t''-t' = 1{,}9\ ^oC$.
Ha a termoszban a hidegebb víz van:

$$(cm_1 + C)\cdot(t'-t_1) = cm_2\cdot(t_2 - t') \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{cm_2t_2 + (cm_1 + C)\cdot t_1}{c\cdot(m_1+m_2)+C}$$

Ha a melegebb víz van a termoszban:

$$(cm_2 + C)\cdot(t_2 - t'') = cm_1\cdot(t''-t_1) \quad \Rightarrow \quad t'' = \frac{cm_1t_1 + (cm_2 + C)\cdot t_2}{c\cdot(m_1+m_2)+C}$$

A két egyensúlyi hőmérséklet közötti különbség:

$$\Delta t = t''-t' = \frac{C\cdot(t_2 - t_1)}{c\cdot(m_1+m_2)+C} > 0$$

b) Ebből az egyenletből meghatározható a termosz hőkapacitása:

$$\boxed{C = \frac{c\cdot(m_1+m_2)\cdot\Delta t}{t_2 - t_1 - \Delta t}}$$

Az adatok behelyettesítése után: $C = 123{,}1\frac{J}{^oC}$

25. MIKOLA SÁNDOR ORSZÁGOS TEHETSÉGKUTATÓ FIZIKAVERSENY 2. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

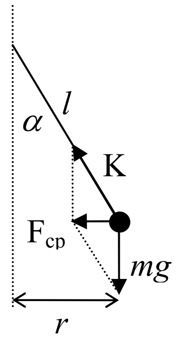
17. Elhanyagolható méretű, 100 g tömegű, elektromosan töltött testet 1 m hosszú, könnyű szigetelő fonálon „kúpingaként” forgatunk meg vízszintes síkban úgy, hogy a fonál a függőlegessel 30^{o}-os szöget zár be. Ha a keringő test töltésével azonos nagyságú, de ellentétes előjelű pontszerű töltést helyezünk a körpálya középpontjába, akkor kétszeresére kell növelnünk a test sebességét ahhoz, hogy ugyanazon a körpályán keringhessen.

a) Mekkorák az említett sebességek?

b) Mekkorák a töltések?

(Suhajda János, Kiskőrös)

Megoldás:



a) Az első esetben a centripetális erő a vektorábra alapján:

$$F_{cp1} = mg \cdot tg\alpha = 0{,}577\,N$$

Az egyenletes körmozgás dinamikai feltétele miatt:

$$F_{cp1} = m \cdot \frac{v_1^2}{l \cdot \sin\alpha}$$

A két egyenletből: $\underline{\underline{v_1 = 1{,}7\frac{m}{s}}}$

A feltétel szerint pedig: $\underline{\underline{v_2 = 2v_1 = 3{,}4\frac{m}{s}}}$

b) Emiatt a második esetben a centripetális erő négyszer akkora, mint az elsőnél:

$$F_{cp2} = 4 \cdot F_{cp1}$$

A nagyobb centripetális erőt a kötélerőn kívül a töltések között fellépő vonzás biztosítja:

$$F_{cp2} = mg \cdot tg\alpha + k \cdot \frac{Q^2}{l^2 \cdot \sin^2\alpha} = F_{cp1} + k \cdot \frac{Q^2}{l^2 \cdot \sin^2\alpha}$$

A két egyenlet összehasonlításából adódik:

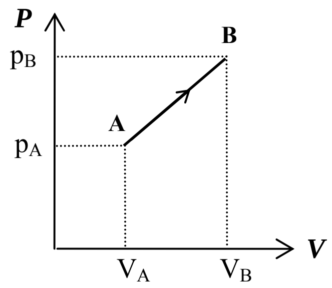
$$3 \cdot F_{cp1} = k \cdot \frac{Q^2}{l^2 \cdot \sin^2\alpha} \text{ , ahonnan } |Q| = l \cdot \sin\alpha \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot F_{cp1}}{k}}$$

Behelyettesítés után a töltések értéke:

$$\underline{\underline{|Q| = 6{,}93 \cdot 10^{-6}\,C}}$$

25. MIKOLA SÁNDOR ORSZÁGOS TEHETSÉGKUTATÓ FIZIKAVERSENY 2. FORDULÓ FELADATAINAK MEGOLDÁSA

18. Héliumgázt az **A** állapotból a **B** állapotba viszünk az ábrán látható folyamattal.
a) Mekkora a folyamat során felvett hő?
b) Hányszor nagyobb ez az érték, ha a gáz nitrogén?
c) Mekkora a két gáznak *erre a folyamatra* értelmezhető fajhője?
Adatok: $p_A = 2\cdot 10^5$ Pa, $p_B = 4\cdot 10^5$ Pa, $V_A = 30$ dm^3, $V_B = 80$ dm^3.



(Holics László, Budapest)

<u>Megoldás</u>:

a) Az I. főtétel szerint

$$\Delta E = Q + W \rightarrow \mathrm{Q} = \Delta E - W = \Delta E + W_{\text{gáz}},$$

ahol $\Delta E = \frac{f}{2}\left(p_\mathrm{B}V_\mathrm{B} - p_\mathrm{A}V_\mathrm{A}\right)$ és $W_{gáz} = \frac{p_\mathrm{A} + p_\mathrm{B}}{2}\left(V_\mathrm{B} - V_\mathrm{A}\right)$.

adatokkal: $\Delta E = 39000\,J$ és $W_{gáz} = 15000\,J$ ahonnan $Q = \mathbf{54000\,J}$

b) Ha a gáz nitrogén, akkor a szabadsági fokszám megnövekedése miatt a belső energia változása lesz nagyobb:

$\Delta E = 65000\,J$ és $W_{gáz} = 15000\,J$ ahonnan $Q = \mathbf{80000\,J}$

c) A fajhő értelmezése szerint: $c^* = \frac{Q}{m\Delta T} = \frac{\Delta E + W}{m\Delta T}$

A tömeg és a hőmérsékletváltozás szorzatát a belső energia megváltozása szolgáltatja:

$$\Delta E = c_\mathrm{v} m\Delta T,$$

ahonnan
$$m\Delta T = \frac{\Delta E}{c_\mathrm{v}}.$$

Ezzel a keresett fajhő:
$$c^* = \frac{\Delta E + W}{\Delta E}\cdot c_v$$

Numerikusan héliumra ill. nitrogénre (táblázatból vett állandó térfogathoz tartozó fajhővel):

$$c^*_{He} = \frac{\Delta E + W}{\Delta E}\cdot c_{\mathrm{v,He}} = \left(1 + \frac{15000}{39000}\right)\cdot 3161\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} = \mathbf{4376{,}77}\frac{\mathbf{J}}{\mathbf{kg}\cdot\mathbf{K}},$$

$$c^*_{N_2} = \frac{\Delta E + W}{\Delta E}\cdot c_{\mathrm{v,N_2}} = \left(1 + \frac{15000}{65000}\right)\cdot 741\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} = \mathbf{912}\frac{\mathbf{J}}{\mathbf{kg}\cdot\mathbf{K}}.$$