

## 11. évfolyam – emelt szintű érettségi vizsgára felkészítő foglalkozás

Óraszám: 216 óra.

A témakörök áttekintő táblázata:

<i>Témakör neve</i>	<i>Óraszám</i>
1. Teljes indukció, kombinatorika, gráfok	21
2. Hatvány, gyök, logaritmus	25
3. Trigonometria	30
4. Komplex számok	20
5. Koordinátageometria	40
6. Differenciálszámítás	50
7. Statisztika, valószínűség	30
<i>Összes óraszám:</i>	<i>215</i>

### 1. Teljes indukció, kombinatorika, gráfok

Óraszám: 21 óra

Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- képes állításokat bizonyítani teljes indukcióval
- képes felismerni a probléma melyik kombinatorikai esethez tartozik;
- képes a kombinatorikai problémához illő módszer önálló megválasztása;
- tudja a gráfokat, mint eszközt használni problémák megoldásában.

Fejlesztési feladatok és ismeretek

- Korábban megismert fogalmak ismétlése, elmélyítése.
- Kombinatorikai és gráfelméleti módszerek alkalmazása a matematika különböző területein, felfedezésük a hétköznapi problémákban.

Fogalmak: Permutáció, variáció, kombináció. Binomiális tétel, binomiális együttható, Pascal-háromszög. Egyszerű gráf, teljes gráf, összefüggő gráf, út, kör, fa.

Javasolt tevékenységek

- Problémák megoldása teljes indukcióval
- Halmaz részhalmazainak számának megállapítása
- Kombinatorikai problémák felvetése
- Permutációs feladatok megoldása (ismétlés nélkül és ismétléssel)
- Variáció – ismétlés nélkül és ismétléssel, a lehetőségek számának megállapítása
- Kombináció – ismétlés nélkül és ismétléssel feldolgozása
- Binomiális együtthatók megismerése, a Pascal-háromszöggel való kapcsolat elemzése
- Vegyes kombinatorikai feladatok megoldása
- Binomiális tétel bizonyítása
- Binomiális együtthatók közti kapcsolatok vizsgálata
- Gráfok megismerése
- Gráfelméleti alapfogalmak: csúcs, él, fokszám fogalmának tárgyalása

- Fokszámra vonatkozó összefüggések feldolgozása
- Gráfok alkalmazása leszámolás feladatokban
- A gráfok osztályozása: egyszerű gráf, teljes gráf, komplementergráf, részgráf
- Összefüggő gráfok vizsgálata, út, kör fogalmának tárgyalása
- Fagráf, feladatok megoldása
- Összetett feladatok, versenyfeladatok megoldása

## 2. Hatvány, gyök, logaritmus

Óraszám: 25 óra

Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri és alkalmazza a logaritmus fogalmát;
- képes megoldani exponenciális, illetve logaritmosos egyenleteket, egyenlőtlenségeket;
- fel tudja ismerni az inverz függvényt párokat;
- képes ábrázolni transzformációval exponenciális, illetve logaritmus függvényeket.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri és alkalmazza az  $n$ -edik gyök fogalmát;
- ismeri és alkalmazza a racionális kitevőjű hatvány fogalmát és a hatványozás azonosságait;
- ismeri a kitevő irracionális kiterjesztésének lehetőségeit;
- egyenletek megoldását behelyettesítéssel, értékkészlet-vizsgálattal ellenőrzi;
- képlettel adott függvényt hagyományosan és digitális eszközzel ábrázol;
- adott értékészletbeli elemhez megtalálja az értelmezési tartomány azon elemeit, amelyekhez a függvény az adott értéket rendeli.

Fejlesztési feladatok és ismeretek

- A matematika belső fejlődésének felismerése, új fogalmak alkotása: a racionális kitevő értelmezése, az irracionális kitevőjű hatvány szemléletes fogalmának kialakítása.
- Tájékozódás a világ mennyiségi viszonyaiban: exponenciálisan, logaritmikusan változó mennyiségek.
- Az inverzfüggvény fogalmának mélyítése.
- Más tudományágakban a matematika alkalmazásának felfedezése.

Fogalmak: Racionális kitevőjű hatvány, irracionális kitevőjű hatvány. Exponenciális növekedés, csökkenés. Logaritmus. Exponenciális függvény és egyenlet, logaritmosos függvény és egyenlet.

Javasolt tevékenységek

- Az egész kitevőjű hatványok, a hatványozás azonosságainak ismétlése.
- Számológép használata hatványok értékének kiszámítására, normálalak használatára.
- Azonos átalakítások, a célszerű módszer, lépés megválasztása.
- A gyökvonásról tanultak ismétlése
- A hatványfogalom kiterjesztése törtkitevőjű hatványok fogalmának kialakítása

- A hatványozás eddigi azonosságai érvényben maradnak – permanencia elv ellenőrzése
- Exponenciális függvény – a hatványfogalom kiterjesztése irracionális kitevőre
- Az exponenciális függvény ábrázolása, vizsgálata irracionális kitevőjű hatvány (szemléletes alapon)
- Az exponenciális függvény transzformációinak alkalmazása
- Az  $ex$  függvény tárgyalása
- Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása
- Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával
- Exponenciális egyenletre vezető valós problémák megoldása
- Számolás 10 hatványaival, 2 hatványaival
- A hatványozás megfordítási lehetőségeinek vizsgálata, a logaritmus fogalmának kialakítása
- Logaritmus értékének meghatározása a definíció alapján és számológéppel
- A természetes alapú logaritmus –  $\ln x$  tárgyalása
- A logaritmus azonosságainak megállapítása és igazolása (Szorzat, hányados, hatvány logaritmus esetén)
- Áttérés más alapú logaritmusra
- A logaritmus azonosságainak alkalmazása kifejezések számértékének meghatározására, kifejezések átalakítására
- Matematikatörténeti kitekintés: A számítások megkönnyítése: Napier. A logaritmus fogalmának kialakulása, változása; logaritmustáblázat
- A logaritmusfüggvény megismerése
- A logaritmusfüggvény ábrázolása, vizsgálata
- Adott alaphoz tartozó exponenciális és logaritmusfüggvény kapcsolatának elemzése
- Az inverz függvény fogalmának erősítése
- Inverz függvénypárok keresése és ábrázolása korábban tanult függvények körében
- A logaritmusfüggvény transzformációinak megvalósítása
- Logaritmosos egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek megoldása
- Megoldás a definíció és az azonosságok alkalmazásával
- Értelmezési tartomány vizsgálata
- Összetett feladatok, versenyfeladatok megoldása

### 3. Trigonometria

Óraszám: 30 óra

Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri a vektorok szorzásának lehetőségeit, ezek alkalmazásait,
- ismeri és alkalmazza a szinusz- és a koszinusztételt;
- ismeri és képes alkalmazni az addíciós tételeket;
- tudja, hogy tudja a függvénytáblázatot használni a témakörbeli problémák megoldásához.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- ismeri hegyesszögek szögfüggvényeinek definícióját a derékszögű háromszögben;

- ismeri tompaszögek szögfüggvényeinek származtatását a hegyesszögek szögfüggvényei alapján;
- ismeri a hegyes- és tompaszögek szögfüggvényeinek összefüggéseit;
- alkalmazza a szögfüggvényeket egyszerű geometriai számítási feladatokban;
- a szögfüggvény értékének ismeretében meghatározza a szöget;
- kiszámítja háromszögek területét;
- ismeri és alkalmazza speciális négyszögek tulajdonságait, területüket kiszámítja;
- átdarabolással kiszámítja sokszögek területét.
- meg tud oldani trigonometrikus egyenleteket, egyenlőtlenségeket, egyenletrendszereket különböző módszerekkel (definíció, azonosságok, függvények).

#### Fejlesztési feladatok és ismeretek

- A geometriai látásmód fejlesztése.
- A művelet fogalmának bővítése két újszerű művelettel, a skaláris szorzással és a vektoriális szorzással.
- Algebrai és a geometriai módszerek közös alkalmazása számítási, bizonyítási feladatokban.
- A tanultak felfedezése más tudományterületeken is.
- A függvényszemlélet alkalmazása az egyenletmegoldás során, végtelen sok megoldás keresése.

Fogalmak: Skaláris szorzat, vektoriális szorzat. Szinusztétel, koszinusztétel. Addíciós tétel, trigonometrikus azonosság, egyenlet, egyenlőtlenség

#### Javasolt tevékenységek

- A vektorokról tanultak rendszerező ismétlése: a vektor fogalma, vektorműveletek, vektorfelbontás
- A vektorok koordinátaival végzett műveletek és tulajdonságaik áttekintése
- A vektor  $90^\circ$ -os elforgatottjának koordinátáinak megállapítása
- Szögfüggvényekről tanultak ismétlése
- Trigonometrikus függvények ábrázolása, vizsgálata
- Trigonometrikus függvények ábrázolása transzformációval
- Összefüggések keresése a szögfüggvények között
- Két vektor skaláris szorzatának bevezetése
- A skaláris szorzat tulajdonságainak megállapítása
- A skaláris szorzás alkalmazása számítási és bizonyítási feladatokban
- Merőleges vektorok skaláris szorzatának elemzése
- A merőlegesség szükséges és elégséges feltételének megállapítása
- Két vektor skaláris szorzatának kifejezése a vektorkoordináták segítségével
- Két vektor vektoriális szorzatának definiálása
- A vektoriális szorzás tulajdonságainak vizsgálata
- Párhuzamos vektorok vektoriális szorzata.
- A párhuzamosság szükséges és elégséges feltétele.
- Két vektor vektoriális szorzatának kifejezése a vektorkoordináták segítségével
- A terület kifejezése vektoriális szorzattal, területvektor.
- A háromszög területének kifejezése két oldal és a közbezárt szög segítségével
- A szinusztétel és a koszinusztétel bizonyítása
- A koszinusztétel és a Pitagorasz-tétel kapcsolatának elemzése
- Szög, távolság, terület meghatározása gyakorlati problémákban

- A tételek alkalmazása bizonyítási feladatokban
- Addíciós tételek: két szög összegének és különbségének szögfüggvényeinek megállapítása
- Kétszeres szögek szögfüggvényei, félszögek szögfüggvényei felírása
- Két szög összegének és különbségének szorzattá alakítása
- A trigonometrikus azonosságok megértése, használata, az alkalmas összefüggés megtalálása
- Függvénytáblázat alkalmazása feladatok megoldásában
- Trigonometrikus azonosságok, egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása
- Egységkör, illetve trigonometrikus függvény grafikonjának felhasználása az egyenlet, egyenlőtlenség megoldásához. Az összes megoldás megkeresése
- Időtől függő periodikus jelenségek vizsgálata
- Összetett feladatok, versenyfeladatok megoldása

#### 4. Komplex számok

Óraszám: 20 óra

Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- megismerje a valós számok halmazának bővítésének okait és lehetőségét;
- értse, hogy bizonyos valós problémák is csak komplex számok segítségével oldhatók meg;
- ismerje a komplex gyökök számát, és a komplex egységgyököket;
- tudja az egyenletek fokszámának és a gyökök lehetséges számának a kapcsolatát;
- tudja, hogy megoldóképlettel legfeljebb a negyedfokú egyenletek oldhatók meg.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- képes felírni komplex számokat algebrai, trigonometrikus és exponenciális alakban és ezeket át tudja alakítani;
- műveleteket tud végezni komplex számokkal és el tudja dönteni melyik ehhez a célszerű alak;
- tetszőleges valós együtthatós másodfokú egyenletet meg tudjon oldani,
- képes legyen a harmadfokú egyenleteket is megoldani.

Fejlesztési feladatok és ismeretek

- A számfogalom bővítése, mélyítése: a komplex számok bevezetésének beillesztése a számkör-bővítések sorozatába; a komplex számok algebrai és trigonometrikus alakjának megismerése; műveletek elvégzése az új számkörben, a műveletek szemléletes jelentésének kialakítása.

Fogalmak: Komplex szám, valós rész, képzetes rész, kanonikus alak, trigonometrikus alak, komplex számsík, egységgyök, az algebra alaptétele

Javasolt tevékenységek

- Polinomosztás gyakorlása
- Számkörbővítés: Természetes számok  $\rightarrow$  egész számok  $\rightarrow$  racionális számok  $\rightarrow$  valós számok áttekintése

- A tanult megoldóképletek ismétlése
- A Casus irreducibilis esetének megbeszélése
- A komplex számok bevezetése
- Kilépés a számegyenesről, a komplex számsíkra
- A komplex számok algebrai alakjának bevezetése
- Valós rész, képzetes rész, abszolút érték, konjugált fogalmának megismerése
- Műveletek végzése algebrai alakban felírt komplex számokkal
- Komplex számok trigonometrikus alakja bevezetése: a komplex szám megadása az abszolút értékkel és az irányszöggel
- Komplex számok összege, különbsége, szorzata, hányadosa kiszámolása
- Műveletek elvégzése trigonometrikus alakkal. Moivre-formula alkalmazása
- Geometriai jelentés vizsgálata
- Hatványozás komplex számok körében
- Gyökvonás komplex számokból
- $n$ -edik egységgyökök, primitív egységgyökök megállapítása, áttekintése
- Komplex számok exponenciális alakjának bevezetése
- Másodfokú egyenlet megoldása a komplex számok körében
- A harmadfokú egyenlet megoldása
- Az algebra alaptétele – a tétel kimondása
- Matematikatörténet: Galois munkásságának megbeszélése

## 5. Koordinátageometria

Óraszám: 40 óra

Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- ismeri a vektorokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat;
- ismer és alkalmaz egyszerű vektorműveleteket;
- alkalmazza a vektorokat feladatok megoldásában;
- megad pontot és vektort koordinátaival a derékszögű koordináta-rendszerben;
- koordináta-rendszerben ábrázol adott feltételeknek megfelelő ponthalmazokat;
- koordináták alapján számításokat végez szakaszokkal, vektorokkal;
- ismeri és alkalmazza az egyenes egyenleteit;
- ki tudja választani, hogy az egyenes melyik alakját fogja használni adott problémánál;
- egyenesek egyenletéből következtet az egyenesek kölcsönös helyzetére;
- kiszámítja egyenesek metszéspontjainak koordinátáit az egyenesek egyenletének ismeretében;
- megadja és alkalmazza a kör egyenletét a kör sugarának és a középpont koordinátáinak ismeretében;
- ismerje a parabola, az ellipszis és a hiperbola fogalmát, képes legyen ezek egyszerű egyenleteinek felírására;
- felismeri a matematika különböző területei közötti kapcsolatot.

A témakör tanulása eredményeként a tanuló:

- problémákat tudjon megoldani vektoros, illetve koordinátageometria módszerekkel;

- képes felírni három pontonátmenő alakzatok egyenletét;

Fejlesztési feladatok és ismeretek

- Elemi geometriai ismeretek megközelítése új eszközzel.
- Geometriai problémák megoldása algebrai eszközökkel.
- Analógia keresése a síkbeli és a térbeli problémák között.
- Számítógép használata.

Fogalmak: Vektor, irányvektor, normálvektor, iránytényező. Egyenes, sík, kör, parabola, ellipszis, hiperbola egyenlete. Kúpszelet.

Javasolt tevékenységek

- A Descartes-féle koordinátarendszer ismételése – síkban és térben.
- A helyvektor és a szabadvektor fogalmának vizsgálata, vektorműveletek végzése
- Lineáris kombináció, komponens, bázis elemzése
- Rendszerező ismételés
- Vektor abszolút értékének kiszámítása
- Két pont távolságának kiszámítása
- A Pitagorasz-tétel alkalmazása
- Két vektor hajlásszögének megállapítása
- Skaláris szorzat használata
- Szakasz osztópont koordinátáinak kiszámolása
- A háromszög súlypontjának a koordinátáinak meghatározása
- A térbeli eset megoldása: a tetraéder súlypontjának koordinátái
- Elemi geometriai ismereteket alkalmazása, vektorok használata, koordináták számolása
- Az egyenes helyzetét jellemző adatok: irányvektor, normálvektor, irányszög, iránytangens áttekintése
- A különböző jellemzők közötti kapcsolat felfedezése, használata
- Két egyenes párhuzamosságának és merőlegességének feltételének megállapítása
- Az egyenes egyenletei: normálvektoros egyenlet, az egyenes paraméteres egyenlete, irányvektoros egyenlet, iránytényező egyenlet, tengelymetszetes egyenlet felírása
- Párhuzamos és merőleges egyenesek vizsgálata
- Geometriai feladatok megoldása algebrai eszközökkel
- Kétismeretlenes lineáris egyenlet és az egyenesek kölcsönös helyzetének áttekintése
- Két ponton átmenő egyenes egyenletének felírása
- Két egyenes metszéspontjának megkeresése
- Pont és egyenes távolságának, két párhuzamos egyenes távolságának kiszámolása
- Normálegyenlet felírása
- Két egyenes szögének kiszámolása
- Skaláris szorzat használata
- Két egyenes szögfelezőinek felírása
- Egyenes normálvektoros egyenletének felírása térbeli koordinátarendszerben
- Paraméteres egyenletrendszer felírása síkban, térben
- Adott ponton áthaladó, adott normálvektorú sík egyenletének megállapítása
- Síkbeli feladatok térbeli analógiáinak elemzése
- Kör egyenletének felírása a középpont és a sugár ismeretében
- A kör és a kétismeretlenes másodfokú egyenlet kapcsolatának elemzése
- Három ponton átmenő kör egyenletének felírása
- Kör és egyenes kölcsönös helyzetének vizsgálata

- A kör érintőjének egyenletének felírási lehetőségeinek vizsgálata
- Két kör közös pontjainak meghatározása
- Másodfokú, kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása
- A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió
- A parabola, mint ponthalmaz bevezetése
- Fókuszpont, vezéregyenes, paraméter fogalmának bevezetése
- Parabola pontjainak szerkesztése
- A parabola tengelyponti egyenletének megállapítása
- Különböző helyzetű parabolák egyenletének felírása, a tengely irányának, a parabola állásának áttekintése
- A parabola és a kétismeretlenes másodfokú egyenletkapcsolatának elemzése
- Három ponton átmenő parabola egyenletének felírása
- A parabola és az egyenes kölcsönös helyzetének vizsgálata
- A diszkrimináns vizsgálata, diszkusszió
- A parabolák hasonlóságának megállapítása
- Az ellipszis, mint ponthalmaz definiálása
- Fókuszpont, nagytengely, kistengely, vezérsugár fogalmának áttekintése
- Ellipszis pontjainak szerkesztése
- Az ellipszis származtatása körből affinitással
- Az ellipszis, mint kúpszelet.
- A henger síkmetszetei.
- Az ellipszis középponti egyenlete.
- A hiperbola, mint ponthalmaz definiálása
- Fókuszpont, valós tengely, képzetes tengely, vezérsugár, asszimptota fogalmának használata
- Hiperbola pontjainak szerkesztése
- A hiperbola középponti egyenlete.
- A hiperbola és a fordított arányosság függvény elemzése
- Kúpszeletek áttekintése
- Ponthalmazok keresése a koordinátasíkon
- Egyenlettel, egyenlőtlenséggel megadott feltételek használata
- Lineáris programozás bevezetése
- Pénzügyi ismeretek: optimalizálási feladatok megoldása
- Összetett feladatok, versenyfeladatok megoldása

## 6. Differenciálszámítás

Óraszám: 50 óra

Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- megismerje az analízis fogalmait és módszereit;
- megismerje a sorozat határértékének fogalmát, definícióját;
- tudjon küszöbindexet keresni egyszerű esetekben,
- meg tudja állapítani a sorozat határértékét;
- tudja, hogy vannak kritikus határértékek és egyszerűbb esetekben kezelni tudja ezeket;
- ismerje az 'e' számot és a hozzá vezető sorozatot;



- ismerje a határérték és a műveletek kapcsolatát sorozatoknál,
- megismerje a függvény határértékének fogalmát végesben, végtelenben;
- tudjon  $\square$ -hoz  $\square$ -t keresni;
- ismerje a határérték és a műveletek kapcsolatát függvényeknél;
- ismerje a folytonosság fogalmát és kapcsolatát a határértékkel;
- tudja, hogy függvényeknél is vannak kritikus határértékek és egyszerűbb esetekben kezelni tudja ezeket;
- ismerje a differenciahányados és a differenciálhányados fogalmát és szemléletes jelentését;
- ismerje az elemi függvények deriváltjának kiszámítását adott helyen;
- fel tudja írni a függvény adott pontjában az érintő egyenletét;
- ismerje a deriváltfüggvényt,
- ismerje a deriválási szabályokat (összeg, különbség, szorzat, hányados, összetett függvény);
- képes legyen összekötni a függvény tulajdonságait a deriváltakkal;
- meg tudjon oldani szélsőérték feladatokat deriválttal és elemi módszerekkel;
- tudja, hogy zárt intervallumon szélsőérték az intervallum szélén is lehet;
- ismerje a különbséget a szükséges, az elégséges és a szükséges és elégséges feltételek között,
- meg tudjon vizsgálni egyszerűbb függvényeket.

#### Fejlesztési feladatok és ismeretek

- Megismerkedés a függvények vizsgálatának új módszerével.
- A függvény folytonossága és határértéke fogalmának megalapozása.
- A differenciálszámítás módszereinek használata a függvények lokális és globális tulajdonságainak vizsgálatára.
- A matematikán kívüli területeken – fizika, közgazdaságtan – is alkalmazások keresése.

Fogalmak: Függvény folytonossága, határértéke. Különbségi hányados függvény, derivált, deriváltfüggvény, magasabb rendű derivált. Monotonitás, lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték. Konvex, konkáv függvény.

#### Javasolt tevékenységek

- Sorozat fogalmának bevezetése
- Korlátos és monoton sorozatok vizsgálata
- Sorozatok konvergenciája – véges és végtelen határérték megfogalmazása
- Konvergens sorozatok tulajdonságainak vizsgálata
- Konvergens sorozatnak csak egy határértéke van – bizonyítás
- Konvergens sorozatok korlátosságának megmutatása
- Műveletek végzése konvergens sorozatokkal
- Összeg, szorzat, hányados határértékének megállapítása
- Monoton és korlátos sorozatok vizsgálata
- Rendőrelv használata
- Programozás – a sorozat sok tagjának kiszámítása – a határérték, a küszöbindex megsejtése
- Néhány nevezetes sorozat határértékének megállapítása
- Vizsgálat végzése: az  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  sorozat határértéke az 'e' szám (szemléletesen)
- A valós számok halmazán értelmezett függvények jellemzése, korábbi ismeretek rendszerező ismétlése

- Függvény határérték fogalmának kialakítása
- Példák keresése a geometria és a fizika területéről
- A határérték definíciójának bevezetése
- Műveletek és határérték kapcsolatának megállapítása
- Véges és végtelen helyen vett határérték meghatározása
- A sorozatok és a függvények határértékének összekapcsolása
- Kritikus határértékek vizsgálata
- Racionális törtfüggvények végtelenben vett határértékének meghatározása
- A  $\frac{\sin x}{x}$  függvény nullában vett határértékének megállapítása
- A határérték becslése számológéppel, számítógéppel
- A függvények folytonossága, áttekintés
- Példák keresése folytonos és nem folytonos függvényekre
- A folytonosság definícióinak bevezetése
- Műveletek végzése folytonos függvényekkel
- Intervallumon folytonos függvények áttekintése
- Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságainak vizsgálata
- Bevezető feladatok megoldása a differenciálhányados fogalmának előkészítésére
- A függvénygörbe érintőjének iránytangensének megkeresése
- A pillanatnyi sebesség meghatározása
- A differenciálhatóság fogalmának megállapítása
- A különbségi hányados függvény, a differenciálhányados (derivált), a deriváltfüggvény értelmezése
- Példák adása nem differenciálható függvényekre
- Kapcsolat megállapítása a differenciálható és a folytonos függvények között
- Konstans függvény, hatványfüggvény deriváltjának kiszámolása
- Alapfüggvények deriváltjának megkeresése
- Műveletek végzése differenciálható függvényekkel: függvény számszorosának deriváltja, összeg, szorzat, hányados, összetett függvény deriváltja.
- Trigonometrikus függvények deriváltjának megállapítása.
- Exponenciális és logaritmusfüggvény deriváltjának kiszámolása
- Magasabb rendű deriváltak értelmezése
- Matematikátörténet: Fermat, Leibniz, Newton, Cauchy, Weierstrass munkásságának áttekintése
- A függvény tulajdonságai és a derivált összekapcsolása: lokális növekedés, fogyás – intervallumon monoton függvény; szélsőérték – lokális szélsőérték, abszolút szélsőérték
- Szükséges és elégséges feltételek pontos megfogalmazása, alkalmazása
- A konvexitás definíciójának bevezetése
- Konvexitás vizsgálata deriválással
- Inflexió jelentésének tárgyalása
- A második derivált és a konvexitás kapcsolatának összekapcsolása
- Függvények vizsgálata elemi eszközökkel és differenciálszámítással
- Az elemi eszközök ismételése: pl. a másodfokú függvény vizsgálata, teljes négyzetté alakítással, a számtani-mértani közép alkalmazása
- Zárt intervallumon értelmezett függvény szélsőértékének megkeresése. Az első derivált zérushelyei és az intervallum végpontjai
- Szélsőérték-feladatok megoldása, a feladat paraméterezése
- A szélsőérték létezésének alátámasztása

- Differenciálszámítás alkalmazásával az adott értelmezési tartományon belül az abszolút szélsőérték helyének és értékének megállapítása
- Az érintő egyenletének felírása

## 7. Statisztika, valószínűség

Óraszám: 30 óra

### Tanulási eredmények

A témakör tanulása hozzájárul ahhoz, hogy a tanuló a nevelési-oktatási szakasz végére:

- adatsokaság alapvető statisztikai jellemzőit meghatározza, értelmezi és értékeli;
- képes számológéppel és anélkül szórást számolni;
- képes grafikonokat készíteni és elemezni;
- konkrét valószínűségi kísérletek esetében az esemény, eseménytér, elemi esemény, relatív gyakoriság, valószínűség, egymást kizáró események, független események fogalmát megkülönbözteti és alkalmazza;
- ismeri és alkalmazza a klasszikus valószínűségi modellt;
- ismeri, és egyszerű esetekben alkalmazza a valószínűség geometriai modelljét;
- meghatározza a valószínűséget visszatevéses, illetve visszatevés nélküli mintavétel esetén.
- ismeri a valószínűségi változó fogalmát,
- ismeri a feltételes valószínűséget.

### Fejlesztési feladatok és ismeretek

- A valószínűség fogalmának bővítése, mélyítése.
- A kombinatorikai ismeretek alkalmazása valószínűség meghatározására.
- Eseményalgebra, az eseményekkel végzett műveletek –a mindennapi szóhasználat és a matematikai megfogalmazás különbségeinek tudatosítása.
- Nevezetes eloszlások felismerése a hétköznapi életben, gyakorlati alkalmazásokban.

Fogalmak: Valószínűség, klasszikus valószínűségi modell. Teljes eseményrendszer. Feltételes valószínűség, független esemény. Valószínűségi változó, eloszlás, várható érték, szórás. Egyenletes eloszlás, binomiális eloszlás, hipergeometrikus eloszlás

### Javasolt tevékenységek

- Statisztikai mintavételek lehetőségeinek megbeszélése.
- Mintavétel visszatevéssel, visszatevés nélkül.
- A jellemzők áttekintése: a minta terjedelme, átlaga, mediánja, módusza, szórása
- Különböző grafikonok készítése
- A korábbi ismeretek rendszerező ismétlése. Közvélemény-kutatás. Minőség-ellenőrzés I
- Véletlen jelenségek megfigyelése
- A modell és a valóság kapcsolatának áttekintése
- Játékok elemzése: igazságos és igazságtalan játék
- Matematikatörténeti áttekintés: szerencsejátékok Pascal, Fermat
- A fogalmak kialakítása: események – eseménytér – elemi események.
- Biztos esemény, lehetetlen események vizsgálata
- Események közötti műveletek és halmazműveletek összekapcsolása

- A valószínűség, mint az eseménytéren értelmezett függvény bevezetése
- Teljes eseményrendszer bevezetése
- Klasszikus valószínűségi modell kialakítása
- A tanult kombinatorikai módszerek használata
- A valószínűség becslése, számolása, összevetés a valósággal – „nagy számok törvénye”
- Feltételes valószínűség, független események bevezetése
- Bizonyítások: a teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel.
- Geometriai valószínűség vizsgálata. Monte Carlo módszer alkalmazása
- Valószínűségi változók bevezetése
- A valószínűségi változók eloszlásának vizsgálata
- A valószínűségi változó várható értéké, szórásának megállapítása
- Visszatevés nélküli mintavétel – hipergeometrikus eloszlás alkalmazása
- Visszatevéses mintavétel - binomiális eloszlás alkalmazása
- Matematikatörténeti áttekintés: Fermat, Pascal, Rényi Alfréd