A trigonometria alapjai

Dr. Czinder Péter

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Segédeszközök és alapfogalmak

1.1. A koordináta-rendszer

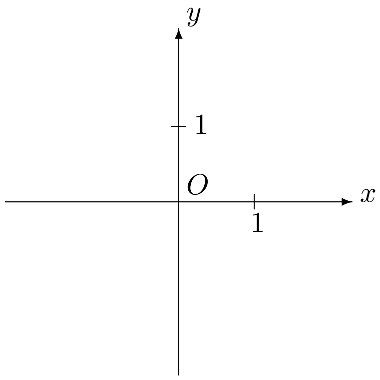
1.1.1. Bevezetés

A mindennapi életben gyakran kerülünk olyan helyzetbe, hogy egy tárgy vagy épület (vagy bármilyen objektum) hollétéről kell érdeklődnünk, vagy fordítva: tőlünk kérnek ilyen jellegű felvilágosítást. Ilyenkor, ha az információ birtokosának nem áll módjában elkísérni az érdeklődőt a helyszínre, el kell magyaráznia, hogyan lelhető fel a keresett tárgy. Ennek során közismert, könnyen megtalálható tájékozódási pontokhoz *viszonyítjuk* a helyzetét: az asztal alatt, Gyöngyöstől 15 km-re északra, a Tisza 205. folyamkilométer-táblájánál stb.

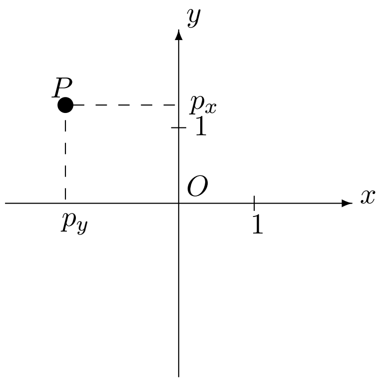
A tájékozódásra a ponthalmazok geometriai leírásánál is szükség lehet. Ezt a célt szolgálja a *koordináta-rendszer*, amelynek több fajtája is van – mi most a Descartes-féle (derékszögű) koordináta-rendszerrel ismerkedünk meg.

1.1.2. A síkbeli derékszögű koordináta-rendszer alkatrészei

Jelöljünk ki a síkban két egymásra merőleges egyenest, és lássuk el őket *skálával* (beosztással). Metszéspontjukat nevezzük *origónak* (jele: O), a két egyenest pedig nevezzük x, illetve y (hagyományos, nem túl szép nevén rendre *abszcissza*-, illetve *ordináta*-tengelyeknek. Ezek megválasztása oly módon kell, hogy történjék, hogy az x tengelyt az *origó* körül 90°-kal, azaz az óramutató járásával ellentétesen elforgatva, annak skálája éppen az y tengely skálájával essen egybe. Mindkét tengelyen bejelöljük az 1 *egység* helyét, és végükön *nyíl* jelzi a pozitív irányt.



Ezek után a sík valamely P pontjának helyzetét a következőképpen adhatjuk meg: meghatározzuk P merőleges vetületét az x és az y tengelyen (a sorrend fontos!), és ha ezek rendre p_x és p_y, akkor azt mondjuk, hogy P koordinátái p_x és p_y, amit a következőképpen jelölünk: $P = (p_x, p_y)$.

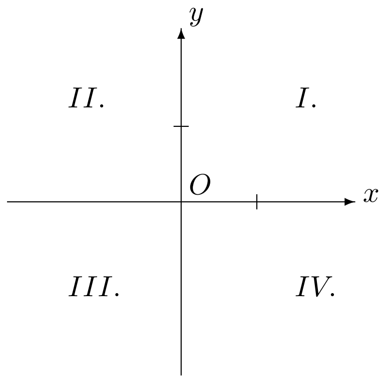


Ekkor p_x-et P x koordinátájának, (első koordinátájának, abszcisszájának), p_y-t pedig P y koordinátájának (második koordinátájának, ordinátájának) hívjuk.

Minthogy a két tengely valójában *számegyenesként* működik, a koordináták egyaránt lehetnek pozitívak, negatívak, illetve 0-val egyenlők. Az abszcissza és az ordináta előjele alapján különböztetjük meg a négy *síknegyedet*. Ezek számozása a következőképpen történik:

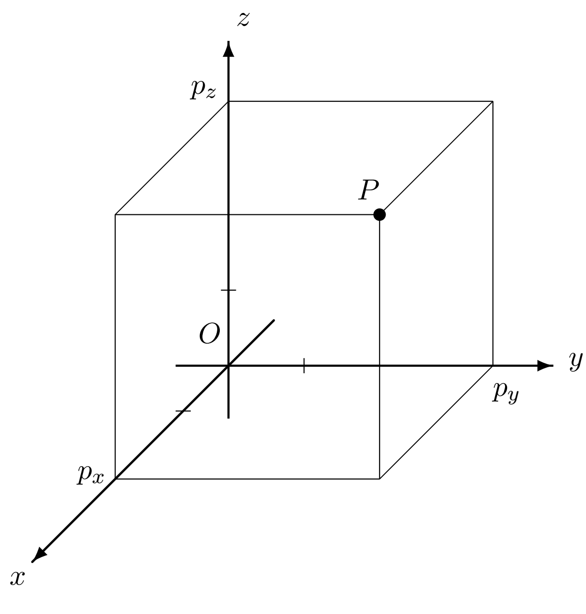
$$
\begin{aligned}
S_1 &= \big\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}, \quad x \geq 0, y \geq 0\big\}\\
S_2 &= \big\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}, \quad x \leq 0, y \geq 0\big\}\\
S_3 &= \big\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}, \quad x \leq 0, y \leq 0\big\}\\
S_2 &= \big\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}, \quad x \geq 0, y \leq 0\big\}.
\end{aligned}
$$

Tehát:



1.1.3. Derékszögű koordináta-rendszer a térben

Előfordul, hogy a sík szűknek bizonyul, és a teljes térre szükségünk van valamely ponthalmaz tulajdonságainak a leírásához. Ez sem jelenthet gondot, ha a síkbeli mintájára bevezetjük a *térbeli derékszögű koordináta-rendszert*, amelyben három, egymásra páronként merőleges tengelyhez viszonyítjuk pontjaink pozícióját. A három tengely, melyet x, y és z tengely elnevezéssel illetünk, az alábbi ábrán látható viszonyban helyezkedik el:



1. Megjegyzés.

A sík és a tér dimenziószámát aszerint állapítjuk meg, hogy hány darab, egymásra páronként merőleges egyenes adható meg bennük. Így a síkot kétdimenziósnak, a teret pedig háromdimenziósnak mondjuk. Kézenfekvő, hogy a számegyenest egydimenziós koordináta-rendszernek nyilvánítsuk. (A felső matematikában kényelmesen dolgozhatunk négy-, öt-, stb.-dimenziós terekkel.)

2. Megjegyzés.

Nem csak derékszögű koordináta-rendszereket használunk. A Földön például a jól ismert hosszúsági- és szélességikör-hálózat is koordináta-rendszer, jóllehet nem rendelkezik egyenes tengelyekkel.

1.2. A radián

1.2.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben a forgásszögek mérésére egy új mértékegységet vezetünk be. Ily módon lehetőségünk lesz nemcsak szögekhez, hanem *valós számokhoz* is szögfüggvényeket rendelni, azaz értelmezni tudjuk az

$$x \mapsto \sin x, \qquad x \mapsto \cos x, \qquad x \mapsto \operatorname{tg} x, \qquad x \mapsto \operatorname{ctg} x$$

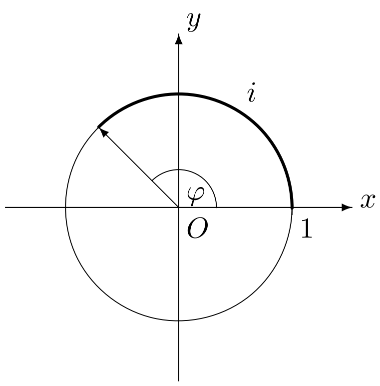
valós függvényeket is.

1.2.2. A radián fogalma

1. Definíció.

Egy φ forgásszög radiánban megadott értéke alatt azt a valós számot értjük, amelynek

- abszolutértéke a φ forgásszöggel elforgatott **i** egységvektor végpontja által leírt görbe ívhossza,
- előjele pedig a φ forgásszög előjelével azonos.



3. Megjegyzés.

A definícióból kitűnik, hogy az 1 radián nagyságú forgásszög esetében az ábrán látható i ív hossza 1 egység.

4. Megjegyzés.

A radiánt általában nem jelöljük. Ha tehát egy szög mérőszáma mellé nem írjuk oda a fok jelét, akkor az radiánban megadott szögként értelmezendő. Például a 15 nagyságú forgásszög valójában 15 radián nagyságú. (Ennek értéke a 360° kétszerese és háromszorosa között van.) Különösen fontos tehát, hogy ha fokban megadott szöget akarunk használni, akkor mindig tüntessük fel a fok jelét, hiszen ennek elmulasztása súlyos félreértésekhez és bonyodalmakhoz vezethet.

1.2.3. Példák

1. Feladat:

Határozzuk meg az előbbi definíció segítségével a $-120°$ nagyságát radiánban!

Megoldás:

Tudjuk, hogy a 120° a 360°-nak éppen egyharmada. Így az $\mathbf{i}$ vektor elforgatása során létrejövő körív hosszúsága a teljes kerületnek egyharmada, amely az 1 egység hosszúságú sugárral számolva 2π. A forgásszög negatív, tehát radiánban megadott nagysága: $-\frac{2\pi}{3}$.

2. Feladat:

Adjuk meg a 810°-ot radiánban!

Megoldás:

Ha az $\mathbf{i}$ egységvektort 810°-kal elforgatjuk, végpontja 2 teljes kört és egy negyedkört ír le. Ez összesen

$$2\frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{9}{4}\cdot 2\pi = \frac{9}{2}\pi.$$

Mivel a forgásszög ezúttal pozitív, ennyi lesz a nagysága radiánban megadva.

5. Megjegyzés.

A fenti, első látásra bonyolultnak ható definíció mellett az szól, hogy segítségével tetszőleges irányú és nagyságú forgásszögnek megadható a mérőszáma radiánban.

1.2.4. Kapcsolat a forgásszög fokban és radiánban kifejezett mérőszáma között

1. Tétel.

Legyen egy forgásszög nagysága fokban megadva α, radiánban pedig x. Ekkor

$$x = \frac{\pi}{180°}\cdot\alpha, \qquad \textit{illetve} \qquad \alpha = \frac{180°}{\pi}\cdot x.$$

Bizonyítás

Tegyük fel először, hogy $\alpha > 0$.
Mivel a pozitív forgásszög egyenesen arányos az $\mathbf{i}$ egységvektor végpontja által a forgás során rajzolt görbe (körív) ívhosszával, következik, hogy e két mennyiség hányadosa a szög bármely 0-tól különböző értéke esetén egyenlő.

Vessük össze a két hányadost a $360°$ és az α forgásszögekre felírva! Tudjuk, hogy a $360°$-os forgatás során az $\mathbf{i}$ vektor végpontja éppen a 2π kerületű körvonalat írja le. Továbbá az α nagyságú forgatás során a radián definíciójából következően az $\mathbf{i}$ vektor végpontja x ívhosszúságú körívet hoz létre. Így

$$\frac{180°}{2\pi} = \frac{\alpha}{x},$$

amelyből α-t, illetve x-et kifejezve a tételben feltüntetett állításhoz jutunk.
Ha α – és így x is – negatív, úgy $-\alpha$ már pozitív, amire alkalmazhatjuk az előző esetet. A $-\alpha$ forgásszög radiánban $-x$, így

$$-x = \frac{\pi}{180°} \cdot (-\alpha), \qquad \text{illetve} \qquad -\alpha = \frac{180°}{\pi} \cdot (-x).$$

Az egyenletek két oldalát -1-gyel szorozva állításunkhoz jutunk. □

1. Következmény.

A fenti tétel alapján $x = 1$, illetve $\alpha = 1°$ behelyettesítésével azt kapjuk, hogy az 1 radián nagyságú szög körülbelül $57,3°$-os, és $1°$ nagysága radiánban nagyjából $0,017$.

2. fejezet

A szögfüggvények értelmezése

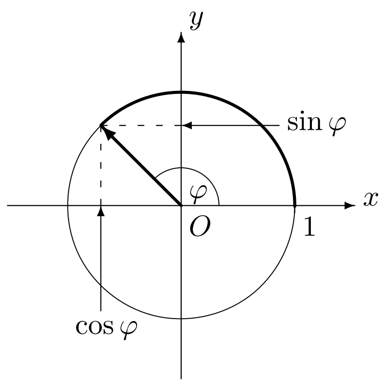
2.1. Forgásszögek szinusza és koszinusza

2.1.1. A forgásszögek szinuszának és koszinuszának fogalma

2. Definíció.

Forgassuk el az $\mathbf{i}$ vektort az O körül φ forgásszöggel. Ekkor az így kapott $\mathbf{v}$ vektor első koordinátáját a φ forgásszög *koszinuszának*, a második koordinátáját pedig a *szinusznak* nevezzük.

A φ forgásszög koszinuszát $\cos\varphi$-vel, szinuszát $\sin\varphi$-vel jelöljük. (Ezek szerint $\mathbf{v} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$.



2.1.2. Példák

3. Feladat:

Határozzuk meg az előbbi definíció segítségével $\sin 90°$-ot!

Megoldás:

Az $\mathbf{i}$ vektort $90°$-kal – pozitív szögről lévén szó, az óramutató járásával ellentétes irányban –

elforgatva éppen a $\mathbf{j}$ vektort kapjuk. Mivel ennek második koordinátája 1, következik, hogy $\sin 90° = 1$.

4. Feladat:

Mennyi $\cos(-540°)$?

Megoldás:

Teendőnk a következő: elforgatjuk az $\mathbf{i}$ egységvektort, ezúttal az óramutató járásával megegyező irányban először 360°-kal (ekkor ismét az $\mathbf{i}$ vektorhoz jutottunk), majd – ugyanebben az irányban – még 180°-kal. Minthogy ezáltal éppen a $\mathbf{v} = (-1, 0)$ vektort kaptuk, megvan a válasz: $\cos(-540°) = -1$.

6. MEGJEGYZÉS.

Azt a kört, amelyet az $\mathbf{i}$ vektor végpontja ír le a forgatás során, *egységsugarú körnek* nevezzük. (A fentiek alapján tehát az egységsugarú kör középpontja az origó, sugara pedig 1 egység.) Ez a kör a későbbiek során fontos segédeszközünk lesz.

7. MEGJEGYZÉS.

A definícióból kitűnik, hogy bármilyen előjelű és abszolutértékű szögnek létezik szinusza és koszinusza.

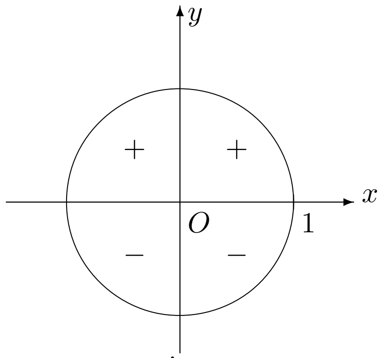
8. MEGJEGYZÉS.

A forgásszögek szinusza és koszinusza nem lehet akármekkora. Tekintve, hogy az egységsugarú kör bármely pontjának koordinátái a $[-1, 1]$ intervallumba esnek, ugyanez vonatkozik a szinusz- és koszinuszértékekre is.

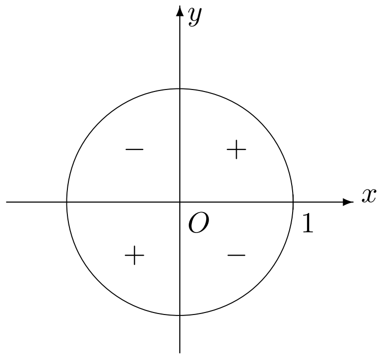
9. MEGJEGYZÉS.

A megismert szögfüggvények előjelét illetően az egységsugarú kör pontjainak koordinátáit elég megvizsgálnunk. Eszerint

- az I. (zárt) síknegyedbe eső forgásszögek szinusza nemnegatív, koszinusza nemnegatív,
- a II. (zárt) síknegyedbe eső forgásszögek szinusza nemnegatív, koszinusza nempozitív,
- a III. (zárt) síknegyedbe eső forgásszögek szinusza nempozitív, koszinusza nempozitív,
- a IV. (zárt) síknegyedbe eső forgásszögek szinusza nempozitív, koszinusza nemnegatív.



$\sin\varphi$



$\cos\varphi$

10. Megjegyzés.

Mivel például a 80°-ot és a 100°-ot szemléltető vektorok egymás tükörképei az y tengelyre, mindkettőnek ugyanaz a második koordinátája. Így $\sin 80° = \sin 100°$. Sőt, ha például a 80°-ot továbbforgatjuk akármilyen irányban, akárhányszor 360°-kal, a forgásszöget ábrázoló vektor a 80°-hoz tartozó vektorra illeszkedik. Ilyenformán végpontjuk koordinátái azonosak, ami annyit jelent, hogy

$$\sin(80° + k \cdot 360°) = \sin 80°,$$

ahol k tetszőleges egész szám lehet. Mindebből az következik, hogy *végtelen sok olyan szög van, amelynek a szinusza egyenlő*. Hasonló a helyzet a forgásszögek koszinuszával is.

11. Megjegyzés.

Ha a forgásszögekhez hozzárendeljük szinuszukat, koszinuszukat, tangensüket, illetve kotangensüket, akkor az illető hozzárendelési utasítással függvényt adunk meg. Ezeket *szögfüggvényeknek* nevezzük.

2.2. Forgásszögek tangense és kotangense

2.2.1. A forgásszögek tangensének és kotangensének fogalma

3. Definíció.

- Egy forgásszög *tangense* alatt szinuszának és koszinuszának hányadosát értjük, ha ez létezik.
- Egy forgásszög *kotangense* alatt koszinuszának és szinuszának hányadosát értjük, ha ez létezik.

A φ forgásszög tangensét $\operatorname{tg}\varphi$-vel, kotangensét $\operatorname{ctg}\varphi$-vel jelöljük.

12. Megjegyzés.

A definícióban a *ha létezik*kifejezés amiatt szükséges, mert osztásról lévén szó, a hányadost csak akkor értelmezhetjük, ha az osztó 0-tól különbözik. Így *nem minden szögnek van tangense, illetve kotangense.*

13. Megjegyzés.

Ha mindkettő létezik, akkor $\operatorname{tg}\varphi$ és $\operatorname{ctg}\varphi$ egymás reciproka.

14. Megjegyzés.

A φ forgásszöghöz tartozó $\mathbf{v}$ vektor, valamint a $\varphi + 180°$-hoz tartozó $\mathbf{w}$ vektor egymás tükörképe az origóra nézve. Így, ha $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, akkor $\mathbf{w} = (-v_1, -v_2)$. Ekkor

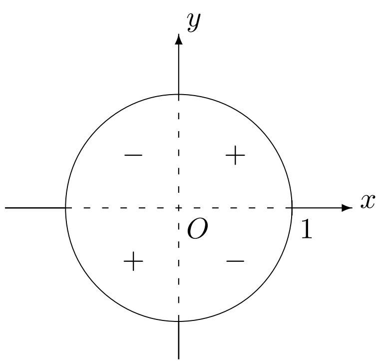
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_2}{v_1} = \frac{-v_2}{-v_1} = \operatorname{tg}(\varphi + 180°),$$

feltéve persze, hogy a hányados létezik. Ebből az következik, hogy ha valamely forgásszöget a 180° bármely egész számú többszörösével megtoldunk, a kapott szög tangense nem változik – ha az egyáltalán létezik. Így végtelen sok szög van, amelyeknek azonos a tangensük. (A kotangenssel hasonló a helyzet.)

15. Megjegyzés.

A tangens és a kotangens előjele könnyen megállapítható, ha a számlálójukban és a nevezőjükben szereplő szögfüggvények előjelét vesszük szemügyre. Így a 0° és 360° közötti forgásszögek esetén

- az I. és III. (nyílt) síknegyedbe eső szögek tangense és kotangense egyaránt pozitív,
- a II. és IV. (nyílt) síknegyedbe eső szögek tangense és kotangense egyaránt negatív.



$\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{ctg}\varphi$

16. MEGJEGYZÉS.

Ha egy forgásszög koszinusza abszolutértékben elég kicsi, úgy a forgásszög tangense abszolutértékben igen nagy lehet. Például

$$\operatorname{tg} 89^\circ = \frac{\sin 89^\circ}{\cos 89^\circ} \approx 57,29.$$

Hasonló a helyzet a forgásszögek kotangensével is.

Így a forgásszögek tangensének és kotangensének nincs sem alsó, sem felső határa.

3. fejezet

Trigonometriai azonosságok

3.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben olyan trigonometriai egyenlőségek szerepelnek, amelyek a bennük szereplő változók összes lehetséges értékére fennállnak. Az ilyen összefüggéseket *azonosságoknak* nevezzük.

Mivel a fejezet célja a trigonometriai egyenletek megoldásának előkészítése, ahol is az ismeretlen általában *valós szám*, az alábbi azonosságokban szereplő szögeket *radiánban* mérjük, és jelölésükre az x, y betűket használjuk.

3.2. Összefüggések egy szög különböző szögfüggvényei között

3.2.1. Összefüggés a tangens és a kotangens szögfüggvény között

2. Tétel.

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}, \quad \textit{illetve} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \quad \textit{ha} \quad x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Bizonyítás

Állításunk a tangens és kotangens definíciójának közvetlen következménye. A feltételben azt a követelményt fogalmaztuk meg, hogy a szóban forgó két szögfüggvény egyaránt értelmezhető legyen. □

3.2.2. Összefüggés a szinusz és a koszinusz szögfüggvény között

3. Tétel.

Minden x *esetén* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy ha a $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ vektor koordinátái: $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, akkor abszolutértékére a $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ összefüggés teljesül. Így, ha az x forgásszöghöz tartozó $(\cos x, \sin x)$ *egységvektorra* írjuk fel ezt az összefüggést, akkor

$$1 = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}$$

adódik. Az egyenlőség mindkét oldalát négyzetre emelve állításunkhoz jutunk. □

2. KÖVETKEZMÉNY.

$$\mathrm{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}, \quad \text{ha} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\mathrm{ctg}^2 x = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}, \quad \text{ha} \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Bizonyítás

A tg, illetve ctg szögfüggvényeket definiáló összefüggések mindkét oldalát négyzetre emelve, majd a **??**. Tétel állítását felhasználva éppen a fenti egyenlőségekhez jutunk. □

17. MEGJEGYZÉS.
Előbbi két tételünk, illetve azok következménye segítségével az x szög bármely két szögfüggvénye között összefüggést teremthetünk.

3.3. Addíciós tételek

Ebben a fejezetben olyan összefüggéseket vezetünk be és bizonyítunk, amelyek két szög összegének vagy különbségének különböző szögfüggvényeit határozzák meg. (Az *addíció* az *összeadás* szó latin eredetű megfelelője.)

Első tételünk bizonyításához szükségünk lesz az alábbi *segédtételre*:

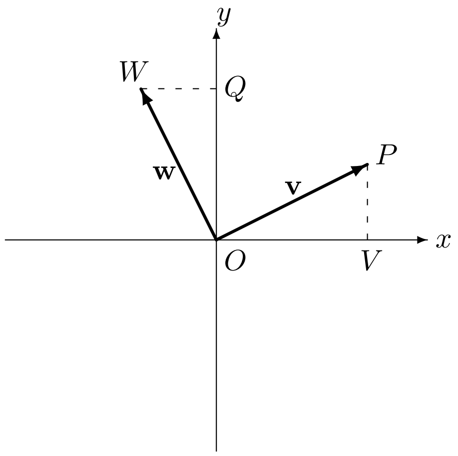
3.3.1. Segédtétel az addíciós tételek bizonyításához

4. TÉTEL.
Tegyük fel, hogy a $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ *vektort az origó körül* $\pi/2$*-vel pozitív irányban elforgatva a* $\mathbf{w}$ *vektort kapjuk. Ekkor* $\mathbf{w}$ *koordinátái:* $\mathbf{w} = (-v_2, v_1)$.

Bizonyítás

A $\mathbf{v}$ vektor végpontjának helye szerint 9 eset különíthető el. E pont lehet ugyanis a négy *nyílt* síknegyed valamelyikében, illeszkedhet a tengelyekből az origó által elkülönített négy *nyílt* félegyenes valamelyikére, továbbá azonos lehet magával az origóval. Bizonyításunk akkor lenne teljes, ha a fenti 9 eset mindegyikében ellenőriznénk a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ koordinátáira vonatkozó állítást. Minthogy azonban ezek egymástól csak kis mértékben különböznek, megelégszünk az I. *nyílt* síknegyedre, illetve az x tengely pozitív félegyenesére illeszkedő $\mathbf{v}$ vektor esetének részletezésével.

I. Tegyük fel, hogy $\mathbf{v}$ végpontja az I. nyílt síknegyed V pontja. Ekkor $\mathbf{w}$ végpontja, amelyet jelöljünk W-vel, a II. nyílt síknegyedbe esik. Legyen V merőleges vetülete az x tengelyen P, továbbá W merőleges vetülete az y tengelyen Q:



Az $OPV\triangle$-ben és a $OQW\triangle$-ben

- $POV\sphericalangle = QOW\sphericalangle$ (merőleges szárú hegyesszögek), továbbá
- $OPV\sphericalangle = OQW\sphericalangle$ $(= 90°)$,

tehát e háromszögekben két-két szög egyenlő – következésképpen a harmadik szögek is: $QWO\sphericalangle = PVO\sphericalangle$. Emellett $OV = OW$, hiszen a pont körüli forgatás távolságtartó geometriai transzformáció. Így $OPV\triangle \cong OQW\triangle$, hiszen egy oldal és a rajta fekvő szögek egyenlők bennük. A megfelelő további oldalak egyenlőségéből $OP = OQ$ és $PV = QW$ következik.
Csakhogy a II. síknegyedbe eső W pont koordinátái a merőleges vetületek és az előjelek figyelembe vételével a következőképpen alakulnak: $W = (-WQ, OQ)$, ami az előbbi egyenlőségek miatt a következőképpen is megadható: $W = (-PV, OP)$.
Minthogy azonban PV éppen V ordinátája, azaz v_2, OP pedig V abszcisszája, vagyis v_1, a W pont – valamint annak $\mathbf{w}$ helyvektora – éppen a tételben megadott $(-v_2, v_1)$ koordinátákkal jellemezhető.

II. Tegyük most fel, hogy a $\mathbf{v}$ vektor V végpontja az x tengely $(a, 0)$ koordinátájú pontja, ahol $a > 0$. Ekkor $\mathbf{w}$ végpontja, vagyis W éppen az y tengely $(0, a)$ koordinátájú pontja. Tudvalevő, hogy a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ helyvektorok koordinátái rendre V, illetve W koordinátáival azonosak, így ezek is $(a, 0)$, illetve $(0, a)$ formában adhatók meg. Mivel ezekre fennáll a tételben megfogalmazott összefüggés, tételünk bizonyítása ebben az esetben is kész.

Az origóba mutató $\mathbf{v}$ vektor esete triviális, hiszen ekkor mind $\mathbf{v}$, mind pedig $\mathbf{w}$ nullvektor, melynek mindkét koordinátája 0.

A maradék 6 eset az imént bemutatottak mintájára, azok csekély változtatásával könnyen bizonyítható. □

3.3.2. A szinuszra és a koszinuszra vonatkozó addíciós tételek

5. Tétel.

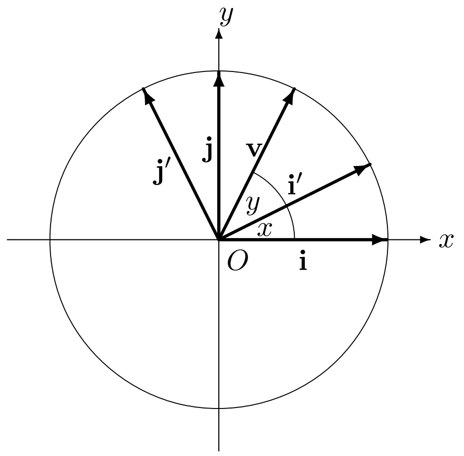
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ *és*
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$

Bizonyítás

Vezessük be a következő jelöléseket:

- Legyen az $\mathbf{i}$ vektor O körüli, x szöggel történt elforgatottja $\mathbf{i}'$,
- legyen az $\mathbf{i}$ vektor O körüli, $x+y$ szöggel történt elforgatottja $\mathbf{v}$, végül
- legyen az $\mathbf{i}'$ vektor O körüli, $\pi/2$ szöggel történt elforgatottja $\mathbf{j}'$.

A vektorainkat szemléltető alábbi ábra arra az esetre vonatkozik, amikor x és y olyan pozitív szögek, melyek összege hegyesszög. A bizonyítás során ezeket a speciális adottságokat sehol sem használtuk ki, így az általánosságot nem sértjük. (Előbbi segédtételünk ugyanis bármely vektor pozitív derékszöggel történő elforgatása esetén megadja az eredményül kapott vektor koordinátáit.)



A forgásszögek szinuszának és koszinuszának értelmezéséből következik, hogy

$$\mathbf{i}' = (\cos x, \sin x), \tag{3.1}$$

$$\mathbf{v} = (\cos(x+y), \sin(x+y)) \,. \tag{3.2}$$

Továbbá, tekintettel arra, hogy $\mathbf{j}'$ az $\mathbf{i}'$ O körüli, $\pi/2$vel való elforgatása útján jött létre, a **??**. Tétel szerint

$$\mathbf{j}' = (-\sin x, \cos x). \tag{3.3}$$

A bizonyítás annak felismerésére épül, hogy az $(\mathbf{i}', \mathbf{j}')$ vektorpár két olyan, egymásra merőleges egységvektorból áll, melyek közül a második az elsőnek az O körüli, $\pi/2$-vel való elforgatása által kapható meg. Értelmezhetünk tehát egy olyan második Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert, amelynek tengelyei ezekre a vektorokra illeszkednek, az egység helyét pedig mindkét tengelyen e vektorok végpontjai jelölik ki.

Adjuk meg ebben a koordináta-rendszerben a $\mathbf{v}$ vektor koordinátáit! Mivel $\mathbf{v}$-t úgy kaphatjuk meg, hogy az $\mathbf{i}'$-t az O körül y szöggel elforgatjuk, $\mathbf{v}$ koordinátái ebben az újonnan bevezetett koordináta-rendszerben: $\mathbf{v} = (\cos y, \sin y)$. Mindez a vektorok koordinátáinak értelmezése alapján azt jelenti, hogy az $\mathbf{i}'$ és $\mathbf{j}'$ vektorokból a $\cos y$, illetve $\sin y$ együtthatókkal képezhetünk $\mathbf{v}$-t előállító lineáris kombinációt:

$$\mathbf{v} = \cos y \cdot \mathbf{i}' + \sin x \cdot \mathbf{j}'.$$

Helyettesítsük be $\mathbf{i}'$ és $\mathbf{j}'$ helyére a (**??**)-ben, illetve (**??**)-ben álló előállításukat:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \cos y\cdot(\cos x\cdot\mathbf{i}+\sin x\cdot\mathbf{j})+\sin y\cdot(-\sin x\cdot\mathbf{i}+\cos x\cdot\mathbf{j})\\ &= \cos x\cos y\cdot\mathbf{i}+\sin x\cos y\cdot\mathbf{j}-\sin x\sin y\cdot\mathbf{i}+\cos x\sin y\cdot\mathbf{j}\\ &= (\cos x\cos y-\sin x\sin y)\mathbf{i}+(\sin x\cos y+\cos x\sin y)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Mindez azt jelenti, hogy a $\mathbf{v}$ vektor az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok lineáris kombinációjaként a $\cos x\cos y-\sin x\sin y$ és $\sin x\cos y+\cos x\sin y$ együtthatók segítségével állítható elő, azaz: $\mathbf{v}$ koordinátái az $\mathbf{i}, j$ bázisra vonatkozóan:

$$(\cos x\cos y-\sin x\sin y, \sin x\cos y+\cos x\sin y).$$

Csakhogy mi a bizonyítás elején, a (**??**) előállításban már leszögeztük, hogy $\mathbf{v}$ koordinátái erre a bázisra nézve:

$$(\cos(x+y), \sin(x+y))\,.$$

Mivel tudjuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektor koordinátáit a bázis kijelölése egyértelműen meghatározza, következik, hogy a két előállítás szükségképpen azonos, azaz $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ és
$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$.
Ezzel a bizonyítás kész. □

A további addíciós tételek kimondásához és bizonyításához érdemes felidéznünk a következő tételt, melynek a nevezetes szögek szögfüggvényeinek felírásakor is hasznát vesszük:

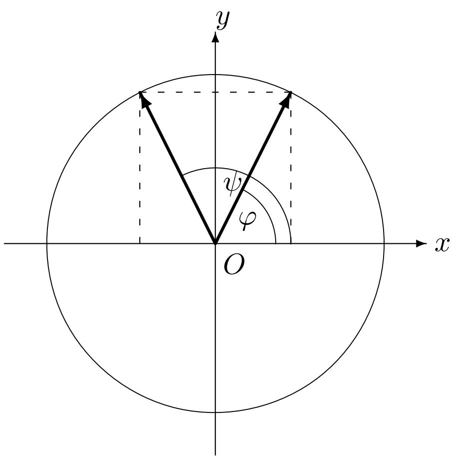
6. Tétel.

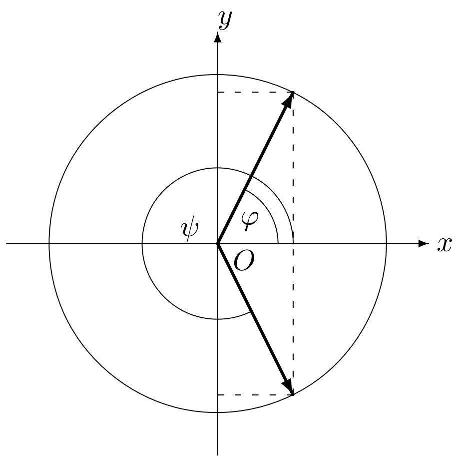
Tegyük fel, hogy a φ és ψ forgásszögekhez tartozó vektorok egymás tükörképei az y tengelyre. Ekkor

$$\sin\varphi=\sin\psi, \qquad \textit{illetve} \qquad \cos\varphi=-\cos\varphi.$$

Amennyiben a φ és ψ forgásszögekhez tartozó vektorok egymás tükörképei az x tengelyre, úgy

$$\sin\varphi=-\sin\psi, \qquad \textit{illetve} \qquad \cos\varphi=\cos\varphi.$$





A tétel ugyanis az alábbi következményekkel jár:

7. TÉTEL.

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \sin x, \qquad \mathrm{tg}\,(-x) = -\mathrm{tg}\,x, \qquad \mathrm{ctg}\,(-x) = -\mathrm{ctg}\,x.$$

Bizonyítás

Első két állításunk annak következménye, hogy az x és a $-x$ szögekhez tartozó vektorok egymás tükörképei az x tengelyre, így alkalmazhatjuk a **??**. Tétel második pontját. A két utóbbi állítást pedig úgy kapjuk meg, hogy az első egyenletet elosztjuk a másodikkal, és viszont.

□

8. TÉTEL.
$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ *és*
$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$

Bizonyítás

Alkalmazzuk a **??**. Tétel t az x és $-y$ szögekre, majd használjuk fel a **??**. Tétel állításait!

$$\begin{aligned}\sin(x-y) &= \sin\left(x + (-y)\right) = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) = \\ &= \sin x \cos y - \cos x \sin y;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(x-y) &= \cos\left(x + (-y)\right) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) = \\ &= \cos x \cos y + \sin x \sin y.\end{aligned}$$

□

18. MEGJEGYZÉS.
Ha a

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

összefüggésben y értékét x-nek választjuk, akkor a már korábban bizonyított

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

tétel egy újabb igazolásához jutunk.

19. MEGJEGYZÉS.
Előbbi két tételünk a következőképpen foglalható össze:
$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ és
$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$
(A $\pm$ és $\mp$ jelek értelmezése úgy történik, hogy ha a bal oldalon a felső műveleti jelet tekintjük, akkor a jobb oldalon is azt kell figyelembe venni.)

3.3.3. A tangensre és a kotangensre vonatkozó addíciós tételek

9. Tétel.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \quad \textit{ha} \quad x, y, x \pm y \neq \frac{pi}{2} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ \operatorname{ctg}(x \pm y) &= \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}, \quad \textit{ha} \quad x, y, x \pm y \neq k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Bizonyítás

Osszuk el a **??**. Megjegyzés első sorát a másodikkal, majd viszont! (A 0-val való osztás veszélyét a az $x \pm y \neq \pi/2 + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ feltétellel kiküszöböltük, hiszen az ennek eleget tevő szögek szinusza 0-tól különböző.)

$$\frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)} = \frac{\sin x \cos y \pm \cos x \sin y}{\cos x \cos y \mp \sin x \sin y}.$$

Egyszerűsítsük a jobb oldali törtet $\cos x \cos y$-nal és használjuk a szögek tangensének definícióját (a tétel feltételei miatt az osztó 0-tól különbözik):

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\frac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} \pm \frac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} \mp \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} \pm \frac{\sin y}{\cos y}}{1 \mp \frac{\sin x}{\cos y} \frac{\sin y}{\cos y}} = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

A tétel kotangensre vonatkozó állítását hasonlóan kapjuk meg, csak most a **??**. Megjegyzés második sorát kell az elsővel elosztani, majd a kapott törteket $\sin x \sin y$-nal egyszerűsíthetjük. □

3.4. A kétszeres szögek szögfüggvényei

10. Tétel.

(1) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

(2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

(3) $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \quad \textit{ha} \quad x \neq \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

(4) $\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}, \quad \textit{ha} \quad x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Bizonyítás

Alkalmazzuk az előbbi addíciós tételeket, y értékét x-nek választva!

(1) $\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x,$

(2) $\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$,

(3) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x+x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, amennyiben teljesül egyrészt az $x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, másrészt a $2x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}$, azaz az $x \neq \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ feltétel.

(4) $\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg}(x+x) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} x - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} x} = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$, ahol a feltételek az előző állítás bizonyításában látott módon következnek a megfelelő addíciós tétel feltételeiből.

□

3.5. Az addíciós tételek egyéb következményei

A kétszeres szögek koszinuszának két újabb előállítását adjuk meg a következő tételben:

11. TÉTEL.

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1, \qquad \textit{illetve} \qquad \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x.$$

Bizonyítás

Mindössze annyit kell tennünk, hogy a már bizonyított

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

összefüggés jobb oldalának első, majd második tagját a

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

tételből kifejezett alakjukban szerepeltetjük:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 \cos^2 x) = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = \\ &= 2\cos^2 x - 1, \end{aligned}$$

illetve

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 = 1 - 2\sin^2 x.$$

□

12. TÉTEL.

$$\begin{aligned} \cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \\ \sin x &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \\ \operatorname{ctg} x &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \textit{ha} \quad x \neq k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{tg} x &= \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \textit{ha} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Bizonyítás

Első két állításunk nyomban igaznak bizonyul, amint a jobb oldalakat a megfelelő addíciós tételek segítségével fejtjük ki:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos x+\sin\frac{\pi}{2}\sin x &= 0\cdot\cos x+1\cdot\sin x=\sin x,\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos x-\cos\frac{\pi}{2}\sin x &= 1\cdot\cos x-0\cdot\sin x=\cos x.\end{aligned}$$

A második két állítás igazolásánál azonban nem támaszkodhatunk a megfelelő tételekre, hiszen most nem teljesülnek maradéktalanul azok feltételei: a $\pi/2$ tangense ugyanis nem értelmezhető. Ha azonban a már bizonyított első egyenletet elosztjuk a másodikkal (a feltétel ugyanis kizárja a 0-val való osztást), éppen a harmadik egyenlőséget kapjuk. Ha az osztás során az osztandó és az osztó szerepét felcseréljük, a negyedik egyenlőséghez jutunk. □

3.6. A félszögek szögfüggvényei

A következő tételek segítségével megadhatjuk egy tetszőleges x szög felének, azaz $x/2$-nek a különböző szögfüggvényeit.

13. Tétel.

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \tag{3.4}$$

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \tag{3.5}$$

$$\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}},\quad \textit{ha}\quad x\neq\pi+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{3.6}$$

$$\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}},\quad \textit{ha}\quad x\neq 2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{3.7}$$

Bizonyítás

(**??**) bizonyításához alkalmazzuk a $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ összefüggést az $x/2$ szögre!

$$\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=1-2\sin^2\frac{x}{2},$$

amelyet a következő módon rendezünk:

$$\begin{aligned}\cos x&=1-2\sin^2\frac{x}{2},\\ 2\sin^2\frac{x}{2}&=1-\cos x,\\ \sin^2\frac{x}{2}&=\frac{1-\cos x}{2},\end{aligned}$$

melynek mindkét oldalából négyzetgyököt vonva a bizonyítani kívánt állítást kapjuk. (E gyökvonás elvégezhető, hiszen $\cos x$ legfeljebb 1 lehet, tehát a jobboldali tört számlálója nemnegatív, így a tört maga is az.)

(**??**) bizonyításához ismét a $\cos 2x$-re vonatkozó összefüggésből indulunk ki, csakhogy ezúttal a $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ alakot használjuk. Felírva az azonosságot $x/2$ kétszeresére, az előző pontban látott lépésekkel második állításunk pillanatok alatt igazolható.

(**??**)-nál először is azt kell leszögeznünk, hogy az egyenlőség két oldalán álló kifejezések értelmezési tartománya azonos. A bal oldal ugyanis pontosan akkor értelmezhető, ha $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$, ami ekvivalens a tételben álló feltétellel. Emellett a jobb oldalon található gyök értelmezhetőségéhez is pontosan annyi szükséges, hogy a nevező ne legyen 0-val egyenlő, hiszen a koszinusz függvény értékkészletéből adódóan a számláló és a nevező mindig nemnegatív. Ez a feltétel viszont mindig a tételbelivel azonos.
Most már könnyű a dolgunk. Annyit kell csupán tennünk, hogy az első pontban bizonyított azonosságot elosszuk a második pontban szereplővel. Az előző gondolatmenet során kiderült, hogy a 0-val való osztás nem fordulhat elő a tételben feltüntetett feltétel miatt.

(**??**) az előbbi módon igazolható, azzal a különbséggel, hogy most a második azonosságot kell az elsővel osztani. Az osztó most is 0-tól különböző a feltételnek köszönhetően. □

20. Megjegyzés.

Az előző tétel segítségével a félszögek különféle szögfüggvényeinek mindössze az abszolutértékét sikerült megállapítani. A gyök előjelét minden esetben úgy kell megválasztanunk, hogy az egyezzen $x/2$ megfelelő szögfüggvényének előjelével. (Célszerű ennek megállapításához a szöget felvenni a koordináta-rendszerben.) Amennyiben $x/2$ előjeléről nincs információnk, úgy a tételeket nagyon körültekintően kell használnunk.

5. Feladat:

Határozzuk meg $\cos 165°$ értékét!

Megoldás:

A **??**. Tételt fogjuk alkalmazni:

$$|\cos 165°| = \sqrt{\frac{1+\cos 330°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)^2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Minthogy a 165° a második síknegyedbe esik, koszinuszának értéke negatív, így

$$\cos 165° = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

14. Tétel.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{1+\cos x},\quad ha\quad x\neq\pi+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}, \tag{3.8}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{1-\cos x},\quad ha\quad x\neq 2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{3.9}$$

Bizonyítás

(**??**) bizonyításához alkalmazzuk a **??**. Tétel (**??**) állítását, majd bővítsük a jobb oldali törtet az $\sqrt{1-\cos x}$ mennyiséggel!

$$\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos x}{1-\cos x}}=\frac{1-\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=\frac{1-\cos x}{\sqrt{\sin^2 x}}$$
$$=\frac{1-\cos x}{\sqrt{|\sin x|}}.$$

Ha most x az első két síknegyedbe esik, akkor mind $\sin x$, mind pedig $\operatorname{tg} x/2$ pozitív, azaz az átalakítás-sorozat két végén szereplő abszolutérték-jelek egyidejűleg elhagyhatók, és máris a bizonyítandó állítás első egyenlőségéhez jutottunk. Ha viszont x a harmadik, vagy a negyedik síknegyedhez tartozik, akkor $\sin x$is és $\operatorname{tg} x/2$ is negatív, tehát az abszolutértékük vétele az ellentettjükhöz vezet:

$$=\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{-\sin x},$$

amely egyenlőtlenség mindkét oldalát -1-gyel szorozva kapjuk meg az említett állítást.

A (**??**)-ben szereplő második egyenlőség igazolása $1+\cos x$-szel történő bővítéssel hamar elkészül:

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1+\cos x)}=\frac{\sin^2 x}{\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

Az egyes osztások végrehajthatóságát a tétel feltétele biztosítja.

(**??**) bizonyítása reciprok-vétellel történhet. □

3.6.1. Szögfüggvények összegének szorzattá alakítása

Az egyenletek megoldása során nagyon sokszor hasznosnak bizonyul, ha a nullára redukált egyenlet nemzéró oldalát sikerül szorzattá alakítani. Ilyenkor ugyanis érvelhetünk azzal, hogy egy szorzat értéke pontosan akkor 0, ha legalább az egyik tényezője az, és a továbbiakban a megoldás több, az eredetinél egyszerűbb (általában alacsonyabb fokú) egyenlet megoldásával folytatódhat.

A következő tétel állításai erre kínálnak lehetőséget.

15. Tétel.

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\frac{\cos(x-y)}{2}, \tag{3.10}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\frac{\sin(x-y)}{2}, \tag{3.11}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\frac{\cos(x-y)}{2}, \tag{3.12}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\frac{\sin(x-y)}{2}, \tag{3.13}$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}, \quad ha \quad x, y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{3.14}$$

$$\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \sin y}, \quad ha \quad x, y \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{3.15}$$

Bizonyítás

(**??**) bizonyítására szorítkozunk – a többi állításnál az eljárás hasonló.
Vezessük be az

$$\alpha = \frac{x+y}{2}, \qquad \beta = \frac{x-y}{2}$$

változókat. Ekkor nyilván

$$x = \alpha + \beta, \qquad \text{illetve} \qquad y = \alpha - \beta.$$

Ez utóbbiakat behelyettesítve (**??**) bal oldalába, majd alkalmazva a **??**. Tételt és **??**. Tételt,

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = 2\sin\alpha\cos\beta =\\ &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.\end{aligned}$$

□

4. fejezet

Geometriai szögek szögfüggvényei

4.1. A derékszögű háromszög hegyesszögeinek szögfüggvényei

A továbbiakban egy szög szinusza, koszinusza, tangense, kotangense alatt az ugyanolyan nagyságú (pozitív) forgásszög hasonló szögfüggvényét értjük.

16. Tétel.

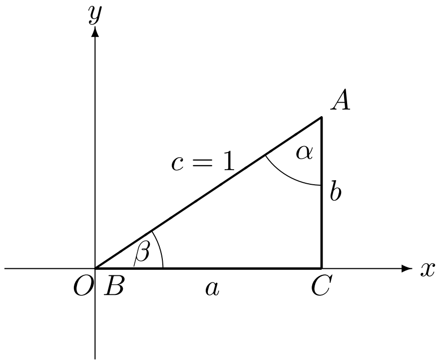
Tegyük fel, hogy egy derékszögű háromszög két befogója a és b, átfogója c, és az ezekkel szemközti csúcsok és szögek rendre A, B, C, illetve α, β és γ. Ekkor az α és β hegyesszögek szögfüggvényeit a háromszög oldalaival a következőképpen adhatjuk meg:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a},$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c}, \quad \cos\beta = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}.$$

Bizonyítás

Feltehetjük, hogy a háromszög pozitív körüljárású, hiszen ellenkező esetben tengelyes tükrözéssel egy, az eredetivel egybevágó pozitív körüljárású háromszöghöz jutunk, amelyben a hegyesszögek szögfüggvényei az alábbiak szerint meghatározhatók. (Egybevágó háromszögek szögei, így azok szögfüggvényei is egyenlők.)

Illesszünk koordináta-rendszert a háromszög síkjára oly módon, hogy annak origója a háromszög B csúcsa legyen; a koordináta-rendszer x tengelye illeszkedjen az a oldalra, és a háromszög az első (zárt) síknegyedbe kerüljön Végül válasszuk 1 egységnek a háromszög c oldalának hosszát.



Mivel az átfogó 1 egység hosszúságú, A illeszkedik az egységsugarú körre. Ezért az A pont helyvektora az $\mathbf{i}$ vektor β forgásszöggel való elforgatottja, azaz koordinátái: $(\cos\beta, \sin\beta)$. Ugyanezek lesznek A koordinátái is.
Csakhogy a koordináta-rendszer elrendezése folytán $A = (a, b)$. Ebből, a megfelelő koordináták egyenlősége miatt,

$$\cos\beta = a = \frac{a}{1} = \frac{a}{c}, \qquad \text{illetve} \qquad \sin\beta = b = \frac{b}{1} = \frac{b}{c}$$

következik. Mivel a háromszög oldalai pozitív számok, ezek a hányadosok 0-tól különbözőek, így értelmezhető β tangense és kotangense is:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{b}{a}, \qquad \text{illetve} \qquad \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{a}{b}.$$

Ha ezek után a háromszöget tengelyes tükrözés, majd eltolás és forgatás révén olyan helyzetbe hozzuk, hogy az A csúcsa legyen az origó stb., akkor az előző gondolatmenettel a

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

összefüggések is könnyen igazolhatók. □

21. Megjegyzés.
Az előbb bizonyított tétel a következőképpen fogalmazható meg szavakkal:

A derékszögű háromszög bármely hegyesszögének...

- szinusza a szöggel szemközti befogó és az átfogó hányadosával,
- koszinusza a szög melletti befogó és az átfogó hányadosával,
- tangense a szöggel szemközti befogó és a szög melletti befogó hányadosával,
- kotangense a szög melletti befogó és a szöggel szemközti befogó hányadosával

egyenlő.

22. Megjegyzés.
Magától értetődik, hogy ezeknek a mondatoknak kizárólag derékszögű háromszögben van értelmük.

6. Feladat:

Határozzuk meg a $3, 4, 5$ egység hosszúságú oldalakkal rendelkező háromszög szögeinek szögfüggvényeit!

Megoldás:

Mivel $3^2 + 4^2 = 5^2$, Pitagorasz tételének a megfordítása alapján a háromszög derékszögű és átfogója az 5 egység hosszúságú (leghosszabb) oldal. Jelöljük a $3, 4, 5$ hosszúságú oldalakat rendre a-val, b-vel és c-vel, a velük szemközti szögeket pedig α-val, β-val, illetve γ-val. A **??**. Tétel alapján

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{5}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{4}{5}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{3}{4}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{4}{3},$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{4}{5}, \quad \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{3}{5}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}, \quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b} = \frac{3}{4}.$$

Továbbá $\sin\gamma = \sin 90° = 1$, $\cos\gamma = \cos 90° = 0$, $\operatorname{ctg}\gamma = 0$, míg $\operatorname{tg}\gamma$ nem értelmezhető.

23. MEGJEGYZÉS.

A későbbiek során kiderül, hogy hogyan lehet egy szög valamely szögfüggvényének ismeretében a szög nagyságára következtetni.

24. MEGJEGYZÉS.

Mivel egy háromszög oldalainak megadása meghatározza a háromszög szögeit – például: az oldalakból megszerkesztve a háromszöget, megmérhetjük azokat –, elvárható, hogy a szögek nagyságát számítással is meg tudjuk adni az oldalak ismeretében. (A derékszögű háromszög esetében a problémát a **??**. Tétellel megoldottuk.)
A következőkben hamarosan az általános háromszög esetére is mutatunk eljárást a szögek meghatározására.

4.2. Nevezetes szögek szögfüggvényei

Nevezetesnek azokat a szögeket tekintjük, amelyek mérőszáma (fokban megadva) egész, és amelyek szögfüggvényei igen egyszerűen megadhatók a négy alapművelet és a négyzetgyökvonás segítségével.

Ez a meghatározás erősen szubjektív, hiszen az *egyszerűen* szó értelmezése mindenkinél más és más. A gyakorlat az, hogy a $30°$ és a $45°$ egész számú többszöröseit tekintjük nevezetesnek, bár gyakran kell használni például az $54°$ szögfüggvényeit is, így azokat szintén célszerű ismerni.

Belátható, hogy azok a szögek, amelyek mérőszáma (fokban megadva) egész, és amelyek szögfüggvényei megadhatók a négy alapművelet és a négyzetgyökvonás véges sok alkalommal történő alkalmazásával, éppen a $3°$ egész számú többszörösei. Így tulajdonképpen ezek mindannyian nevezeteseknek tekinthetők.

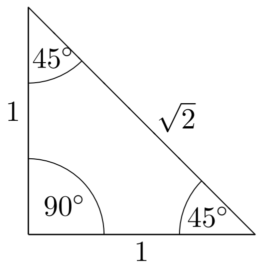
4.2.1. A $45°$ szögfüggvényei

17. TÉTEL.

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \operatorname{tg} 45^\circ = 1, \qquad \operatorname{ctg} 45^\circ = 1.$$

Bizonyítás

Tekintsük azt az egyenlő szárú derékszögű háromszöget, amelynek befogói 1 egység hosszúak. Pitagorasz tétele alapján a háromszög átfogója $\sqrt{2}$-vel egyenlő.



Felhasználva a **??**. Megjegyzést, a következő egyenlőségek adódnak:

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1, \quad \operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{1}{1} = 1.$$

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk. □

4.2.2. A 60° és a 30° szögfüggvényei

18. Tétel.

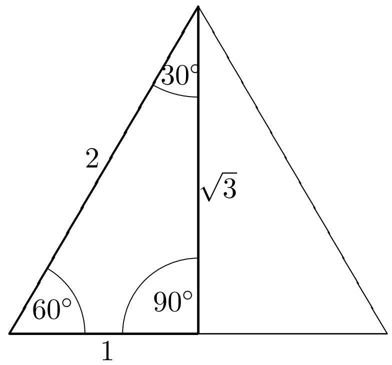
$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}, \qquad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

illetve

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}.$$

Bizonyítás

Húzzuk meg a 2 egység oldalhosszúságú szabályos háromszög egyik magasságát. Ezzel a háromszöget két egybevágó derékszögű háromszögre bontottuk, melyek átfogója 2 egység, a rövidebbik befogója 1 egység (a szabályos háromszög oldalának a fele), így a hosszabbik befogója (vagyis az eredeti háromszög magassága) Pitagorasz tétele alapján $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ hosszúságú. Továbbá, a létrejött két derékszögű háromszög szögei 60°, 30°, 90° nagyságúak:



Alkalmazva a derékszögű háromszög hegyesszögeinek szögfüggvényeiről szóló ??. Megjegyzést, világos, hogy

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}, \qquad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

illetve

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}. \qquad \square$$

25. Megjegyzés.

Jó, ha megfigyeljük, hogy a 60°, illetve a 30° szinusza, illetve koszinusza esetén számításba jövő $\sqrt{3}/2$ és $1/2$ közül a $\sqrt{3}/2$ a nagyobb.

4.2.3. A többi nevezetes szög szögfüggvényei

Azoknak a szögeknek a szögfüggvényeit, melyeket a koordináta-rendszer tengelyeire illeszkedő egységvektor jellemez, a vektor végpontjait leolvasva könnyen meghatározhatjuk.

A 30°, illetve a 45° egyéb többszöröseinek eseteit a ??. Tétel segítségével vezethetjük vissza a 30° és a 45° szögfüggvényeire.

3. Következmény.

$$\begin{aligned} \sin 120^\circ &= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \cos 120^\circ &= -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}, \\ \sin 135^\circ &= \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \cos 135^\circ &= -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin 150^\circ &= \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, & \cos 150^\circ &= -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

hiszen a hozzájuk tartozó vektorok páronként egymás tükörképei az y tengelyre nézve.

$$\begin{aligned} \sin 210^\circ &= -\sin 150^\circ = -\frac{1}{2}, & \cos 210^\circ &= \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin 225^\circ &= -\sin 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \cos 225^\circ &= \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin 240^\circ &= -\sin 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, & \cos 240^\circ &= \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

hiszen a hozzájuk tartozó vektorok páronként egymás tükörképei az x tengelyre nézve.

$$\sin 300^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 300^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$
$$\sin 315^\circ = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos 315^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin 330^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}, \qquad \cos 330^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

hiszen a hozzájuk tartozó vektorok páronként egymás tükörképei az y tengelyre nézve.

26. Megjegyzés.

Az egyes szögek szinuszának és koszinuszának ismeretében könnyen megadhatjuk tangensüket, illetve kotangensüket.

27. Megjegyzés.

A fentiek alapján megadhatjuk azoknak a tetszőleges előjelű és abszolutértékű szögeknek a szögfüggvényeit is, amelyeknek vektora a fenti szögek valamelyikének vektorára illeszkedik.

28. Megjegyzés.

Ha egy forgásszög valamely szögfüggvényét kell meghatároznunk, okvetlenül keressük meg – gondolatban vagy ténylegesen – a forgásszöghöz tartozó vektort az egységsugarú körben.

4.2.4. A nevezetes szögek szögfüggvényeinek táblázata

A φ szög fokban	A φ szög radiánban	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$
0	0	0	1	0	nincs
30	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90	$\frac{1}{2}\pi$	1	0	nincs	0
120	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
150	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180	π	0	-1	0	nincs
210	$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
225	$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
240	$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
270	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	nincs	0
300	$\frac{5}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
315	$\frac{7}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1
330	$\frac{11}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$
360	2π	0	1	0	nincs

4.3. Példa a trigonometrikus azonosságok alkalmazására

A nevezetes szögek bevezetésénél megemlítettük, hogy a 3°-os szög szögfüggvényei megadhatók *pontosan*, azaz a négy alapművelet és a négyzetgyökvonás véges sok alkalommal történő alkalmazásával.

A továbbiakban meghatározzuk $\sin 3^\circ$ pontos értékét, amelynek során lehetőségünk nyílik több, a korábbiak során megismert tételünk alkalmazására.

19. Tétel.

$$\sin 3^\circ = \frac{\sqrt{8 - \sqrt{2}\sqrt{5 - \sqrt{5}} - \sqrt{6}\sqrt{3 + \sqrt{5}}}}{4}.$$

Bizonyítás

A tétel igazolását az alábbi lépésekben végezzük:

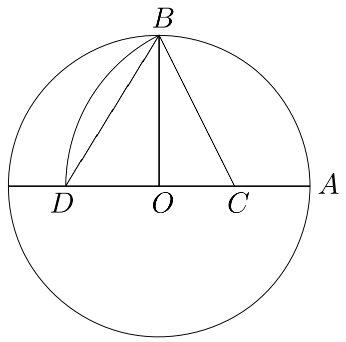
(1) Megadjuk $\sin 54^\circ$ és $\cos 54^\circ$ pontos értékét.

(2) A szögek különbségének szinuszára vonatkozó **??**. Tétel segítségével megadjuk $\cos 6^\circ$ értékét.

(3) A félszögek szinuszára vonatkozó **??**. Tétellel kiszámítjuk $\sin 3^\circ$-ot.

Bizonyítás nélkül megemlítjük, hogy adott körbe a következőképpen írhatunk szabályos ötszöget:

Legyen OA és OB a kör két, egymásra merőleges sugara. Az OA sugár c felezőpontjának B-től mért távolságát a CO félegyenesre felmérve a CD szakaszt kapjuk. A körbe írt szabályos ötszög oldala a BD szakasz:



Legyen a kör sugara 1 egység. Ekkor Pitagorasz tétele alapján

$$BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

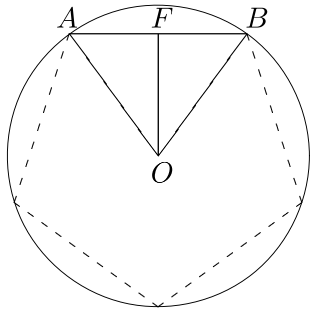
Emiatt

$$OD = CD - OC = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

A $DOC\triangle$ derékszögű. Felírva Pitagorasz tételét, a BD szakaszra a következő adódik:

$$BD = \sqrt{DO^2 + OB^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}+1+4}{4}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

Legyen most az O középpontú, 1 egység sugarú szabályos ötszög egyik oldala az AB szakasz, amelynek felezőpontja F. Az $AOB\sphericalangle$ a teljesszög egyötöd része, azaz $72°$-os, így az $FOB\sphericalangle$ ennek fele, vagyis $36°$. Mindez azt jelenti, hogy $FBO\sphericalangle = 54°$.



Most már felírhatjuk az $54°$-os $FBO\sphericalangle$ koszinuszát a szög melletti befogó (ez az előbb kiszámított BD hosszúság fele) és az 1 egység hosszúságú OB átfogó hányadosaként:

$$\cos 54° = \frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{2} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

Ezek után $\sin 54°$ meghatározása sem okoz gondot, hiszen

$$\sin^2 54° = 1 - \cos^2 54° = 1 - \frac{5-\sqrt{5}}{8} = \frac{8-5+\sqrt{5}}{8} = \frac{3+\sqrt{5}}{8},$$

vagyis, felhasználva, hogy a szög az első síknegyedbe tartozik, így szinusza pozitív,

$$\sin 54° = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}.$$

Most már alkalmazhatjuk a szögek különbségének koszinuszát előállító **??**. Tételt:

$$\begin{aligned}\cos 6° &= \cos(60° - 54°) = \cos 60° \cos 54°) + \sin 60° \sin 54°)\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}.\end{aligned}$$

Eljött az ideje, hogy alkalmazzuk a félszögek szinuszára vonatkozó (**??**) összefüggést. Ennek során az abszolutérték-jel elhagyható, hiszen ismét az első síknegyed szögéről van szó:

$$\sin 3^\circ = \sin \frac{3^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 6^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{3+\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}}\right)}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}\sqrt{3+\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{5-\sqrt{5}}-\sqrt{3}\sqrt{3+\sqrt{5}}}{8\sqrt{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8-\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}-\sqrt{6}\sqrt{3+\sqrt{5}}}{16}} = \frac{\sqrt{8-\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}-\sqrt{6}\sqrt{3+\sqrt{5}}}}{4}.$$

□

29. Megjegyzés.

A 3° szinuszának ismeretében a többi szögfüggvénye is megadható, hiszen korábbi tételeink jóvoltából bármely két szögfüggvény között összefüggést tudunk teremteni.

30. Megjegyzés.

A 3° többszöröseinek a szögfüggvényeit az addíciós tételek ismételt alkalmazásával megadhatjuk.

31. Megjegyzés.

A matematikának sokáig megoldatlan problémája volt a szögharmadolás rejtélye, azaz évezredeken keresztül nem tudták, hogy egy szög birtokában megszerkeszthető-e körzővel-vonalzóval, *euklidészi módszerekkel* annak egyharmada. Csak a XX. században derült ki, hogy ez nem lehetséges. Meghökkentő, de ez az oka annak, hogy az 3° szögfüggvényei nem adhatók meg pontosan, azaz a négy alapművelet és a négyzetgyökvonás véges sok alkalommal történő alkalmazásával. Így a legkisebb, *egész mérőszámú*, pontosan meghatározható szög a 3°.

32. Megjegyzés.

A bizonyítás első ábráján szereplő DO szakaszról kimutatható, hogy ez az O középpontú, OB sugarú körbe írt szabályos tízszög oldala.

33. Megjegyzés.

A bizonyítás „melléktermékeként” az 54° szinuszát és koszinuszát is előállítottuk. A megfelelő trigonometriai azonosságokkal ezek után megadhatók a 36°, 72°, 18°, 27° stb. szögfüggvényei is.

5. fejezet

Trigonometrikus egyenletek

Amennyiben egy egyenletben valamelyik változónak egy vagy több szögfüggvénye is szerepel, úgy az egyenletet trigonometrikus egyenletnek nevezzük.

A trigonometrikus egyenlet gyökét általában a valós számok halmazából kell kiválasztanunk. Ezt a következő definíció segítségével értelmezhetjük:

4. Definíció.

Egy x valós szám szinusza, koszinusza, tangense, kotangense alatt annak a forgásszögnek a megfelelő szögfüggvényét értjük, amelynek a nagysága radiánban x.

34. Megjegyzés.

Bizonyos esetekben megengedhető, hogy az egyenlet gyökeként olyan, fokban megadott forgásszöget határozzunk meg, amelyet az egyenletbe behelyettesítve az egyenlőség fennáll. Ez a lehetőség azonban nem áll rendelkezésünkre, amennyiben az egyenletben a változó *nem trigonometrikus* függvénye, valamint valamely szögfüggvénye egyidejűleg van jelen. Például, az

$$x + \sin x = \pi$$

egyenlettel nem tudunk mit kezdeni, ha x-et fokban mérjük, hiszen ilyenkor x nem adható össze a $\sin x$ valós számmal. Azonban azonnal ellenőrizhetjük, hogy az $x = \pi$ valós szám gyöke az egyenletnek. (Természetesen a trigonometrikus egyenletek megoldása is akkor teljes, ha az egyenlet összes gyökét megtaláltuk.)

35. Megjegyzés.

A trigonometrikus egyenletek megoldása általában két fázisra bontható. Először meghatározzuk az ismeretlen valamely szögfüggvényének értékét, majd a tanult módon megállapítjuk, hogy melyek azok a valós számok, amelyeknek az illető szögfüggvénye az imént kiszámított mennyiség. Az első lépésben tehát a trigonometrikus összefüggések játsszák a kulcsszerepet, míg a második mozzanat során a visszakeresési feladat precíz végrehajtásán múlik a siker.

5.1. Példák trigonometrikus egyenlet megoldására

7. Feladat:

Oldjuk meg a $\sin x = \sin 2x$ egyenletet!

Megoldás:

Tudjuk, hogy
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x.$$
Nullára redukájuk az egyenletet, majd $\sin x$ kiemelésével szorzattá alakítjuk a bal oldalát:
$$\begin{aligned} \sin x - 2\sin x\cos x &= 0, \\ \sin x(1 - 2\cos x) &= 0. \end{aligned}$$
Mivel egy szorzat értéke pontosan akkor 0, ha legalább az egyik tényezője az, két eset van:
1. eset:
$$\begin{aligned} \sin x &= 0, \\ x &= k\cdot\pi, \qquad k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$
2. eset:
$$\begin{aligned} 1 - 2\cos x &= 0, \\ 1 &= 2\cos x, \\ \frac{1}{2} &= \cos x, \\ x &\in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5}{3}\pi + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$
Összefoglalva, az egyenlet gyökei:
$$x \in \left\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5}{3}\pi + 2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

8. Feladat:

Oldjuk meg a $\cos^2 x - \cos x = \sin^2 x$ egyenletet!

Megoldás:

Vonjunk ki az egyenlet mindkét oldalából $\sin^2 x$-et, majd alkalmazzuk a kétszeres szögek koszinuszának tételét!
$$\begin{aligned} \cos^2 x - \sin^2 x - \cos x &= 0, \\ \cos 2x - \cos x &= 0. \end{aligned}$$
Ezután a szögfüggvények összegének szorzattá alakításáról szóló ...-t alkalmazva a következőt kapjuk:
$$\begin{aligned} -2\sin\frac{x+2x}{2}\sin\frac{x-2x}{2} &= 0, \\ \sin\frac{3x}{2}\sin\frac{-x}{2} &= 0, \\ \sin\left(\frac{3}{2}x\right)\cdot\left(-\sin\frac{x}{2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Mivel egy szorzat értéke pontosan akkor 0, ha legalább az egyik tényezője az, két eset van:
1. eset:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{3}{2}x\right) &= 0,\\ \frac{3}{2}x &= k\cdot\pi, \qquad k\in\mathbb{Z},\\ x &= \frac{2}{3}k\cdot\pi, \qquad k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

2. eset:

$$\begin{aligned}\sin\frac{x}{2} &= 0,\\ \frac{x}{2} &= k\cdot\pi, \qquad k\in\mathbb{Z},\\ x &= 2k\cdot\pi, \qquad k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Mivel a 2. esetben kapott gyökök halmaza részhalmazát képezi az 1. esetben kapottakénak, az egyenlet gyökei:

$$x\in\left\{\frac{2}{3}k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

9. Feladat:
$\sin 3x = \cos 5x$

Megoldás:

Először is biztosítjuk, hogy mindkét oldalon azonos szögfüggvény szerepeljen. Ehhez alkalmazhatjuk a

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

tételt:

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-5x\right),\\ \sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2}-5x\right) &= 0.\end{aligned}$$

Szorzattá alakítjuk az egyenlet bal oldalát:

$$\begin{aligned}2\cos\frac{3x+\frac{\pi}{2}-5x}{2}\sin\frac{3x-\frac{\pi}{2}+5x}{2} &= 0,\\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right) &= 0.\end{aligned}$$

Újból a 0-val egyenlő szorzat jelenléte miatt: *1. eset:*

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0,$$
$$\frac{\pi}{4}-x=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi, \qquad k\in\mathbb{Z},$$
$$-x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi, \qquad k\in\mathbb{Z},$$
$$-x=-\frac{\pi}{4}-k\cdot\pi, \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

?ivel az 1. esetben kapható összes gyök felírásakor k befutja az egész számok halmazát, pontosan ugyanezeket a gyököket kapjuk, ha a gyökhalmazt

$$x=-\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi, \qquad k\in\mathbb{Z}$$

alakban adjuk meg. Sőt, ha $\frac{\pi}{4}$ helyett a nála π-vel nagyobb $\frac{3}{4}\pi$-hez adjuk hozzá π egész számú többszöröseit, a gyökök halmaza akkor sem változik. Ezért az 1. esetben kapott gyökök a következőképpen adhatók meg:

$$x=\frac{3}{4}\pi+k\cdot\pi, \qquad k\in\mathbb{Z},$$

vagyis az egyenlet gyökei:

$$x\in\left\{\frac{3}{4}\pi+k\cdot\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

2. eset:

$$\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=0,$$
$$4x-\frac{\pi}{4}=k\cdot\pi, \qquad k\in\mathbb{Z},$$
$$4x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi, \qquad k\in\mathbb{Z},$$
$$x=\frac{\pi}{16}+k\cdot\frac{\pi}{4}, \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Összefoglalva, az egyenlet gyökei:

$$x\in\left\{\frac{3}{4}\pi+k\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{4} \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

10. Feladat:
$4\sin^2 x+\cos^2 2x-1=0$

Megoldás:

A kétszeres szögek koszinuszának tételét abban az alakjában fogjuk alkalmazni, amely azt a szög szinuszának segítségével adja meg:

$$4\sin^2 x+(1-2\sin^2 x)^2-1=0.$$

A négyzetre emelést elvégezzük, majd rendezzük a $\sin x$-re nézve negyedfokú egyenletet:

$$4\sin^2 x + 1 - 4\sin^2 x + \sin^4 x - 1 = 0,$$

amiből $\sin^4 x = 0$, azaz $\sin x = 0$. Tehát az egyenlet gyökei:

$$x \in \Big\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

11. Feladat:
$\sin 7x + \cos 2x = -2$

Megoldás:

Mivel a szögek szinusza és koszinusza egyaránt a $[-1\ ,\ 1]$ intervallumba esik, a bal oldal akkor és csak akkor lehet egyenlő -2-vel, ha a két összeadandó külön-külön is -1-gyel egyenlő. (Ha ugyanis akár csak az egyikük is meghaladná azt, az összeg óhatatlanul -2 fölé emelkedne.) Így a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\sin 7x = -1, \tag{5.1}$$
$$\cos 2x = -1. \tag{5.2}$$

Ezeket külön-külön megoldva:
(**??**)-re

$$\begin{aligned} \sin 7x &= -1 \\ 7x &= \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x &= \frac{3}{14}\pi + \frac{2}{7}k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

illetve (**??**) esetében

$$\begin{aligned} \cos 7x &= -1 \\ 7x &= \pi + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}, \\ x &= \frac{\pi}{2} + l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(A periodicitás miatti tagban szereplő egész számokat a két egyenlet esetén eltérő betűkkel kell jelölnünk, hiszen semmi okunk sincs feltételezni, hogy az egyenletnek eleget tevő x érték esetén a kettő azonos lenne. Mi több, rögtön látható, hogy ha $k = l$, akkor a gyököt szolgáltató két egyenlőség ellentmond egymásnak.)
Meg kell tehát keresnünk k és l azon egész értékeit, amelyekre a két előállítás ugyanazt az x értéket szolgáltatja. Ekkor nyilván

$$\frac{3}{14}\pi + \frac{2}{7}k\pi = \frac{\pi}{2} + l\pi.$$

Elosztva az egyenlet mindkét oldalát π-vel, majd megszorozva 14-gyel, végül rendezve a következő *diofantoszi* egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} 3 + 4k &= 7 + 14l, \\ 4k - 14l &= 4, \\ 2k - 7l &= 2. \end{aligned}$$

Kifejezve ebből k-t, a következőt kapjuk: $k = \frac{7l}{2} + 1$.
Mi ennek az egyenletnek az egész gyökeit keressük. Ahhoz, hogy k egész legyen, az szükséges, hogy $7l$ osztható legyen 2-vel, ami viszont azt jelenti, hogy l páros. Ez azzal ekvivalens, hogy megadható

$$l = 2m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

alakban. (Ekkor $k = 7m + 1$.) Így

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2m\pi \mid m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Természetesen a másik előállítás is ugyanezt az eredményt szolgáltatja:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{14}\pi + \frac{2}{7}k\pi = \frac{3}{14}\pi + \frac{2}{7}(7m+1)\pi = \\ &= \left(\frac{3}{14} + \frac{2}{7}\right)\pi + 2m\pi = \frac{\pi}{2} + 2m\pi, \end{aligned}$$

ahol m tetszőleges egész szám lehet.

12. Feladat:

$\sin^4 x - \cos^4 x = \cos 4x$

Megoldás:

Felhasználjuk, hogy egyrészt

$$\begin{aligned} \sin^4 x - \cos^4 x &= (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -\cos 2x = \\ &= -\cos 2x, \end{aligned}$$

másrészt pedig

$$\cos 4x = \cos(2 \cdot 2x) = 2\cos^2 2x - 1.$$

Ezeket behelyettesítve

$$-\cos 2x = 2\cos^2 2x - 1.$$

Rendezzük, majd megoldjuk a $\cos 2x$-re nézve másodfokú egyenletet:

$$2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0.$$

Ezt megoldva: $\cos 2x \in \{-1; \frac{1}{2}\}$.
1. eset:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= -1, \\ 2x &= \pi + 2k\pi, \\ x &= \frac{\pi}{2} + k\pi. \end{aligned}$$

2. eset:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \frac{1}{2}, \\ 2x &\in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}, \\ x &\in \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5}{6}\pi + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

Feltüntetve ezeket az egységsugarú körben, eredményünk tömörebb alakban is megfogalmazható a következőképpen:

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

6. fejezet

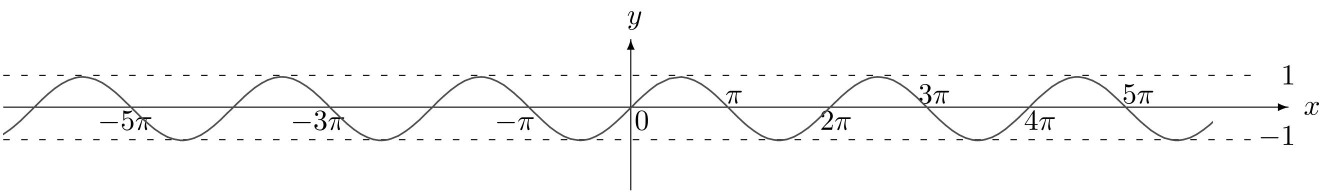
Trigonometrikus függvények

6.1. A szinuszfüggvény

Ábrázoljuk az

$$f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin x$$

függvényt!

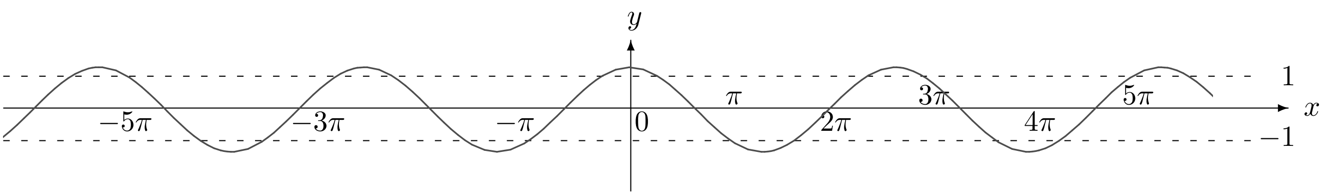


6.2. A koszinuszfüggvény

Ábrázoljuk az

$$f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos x$$

függvényt!

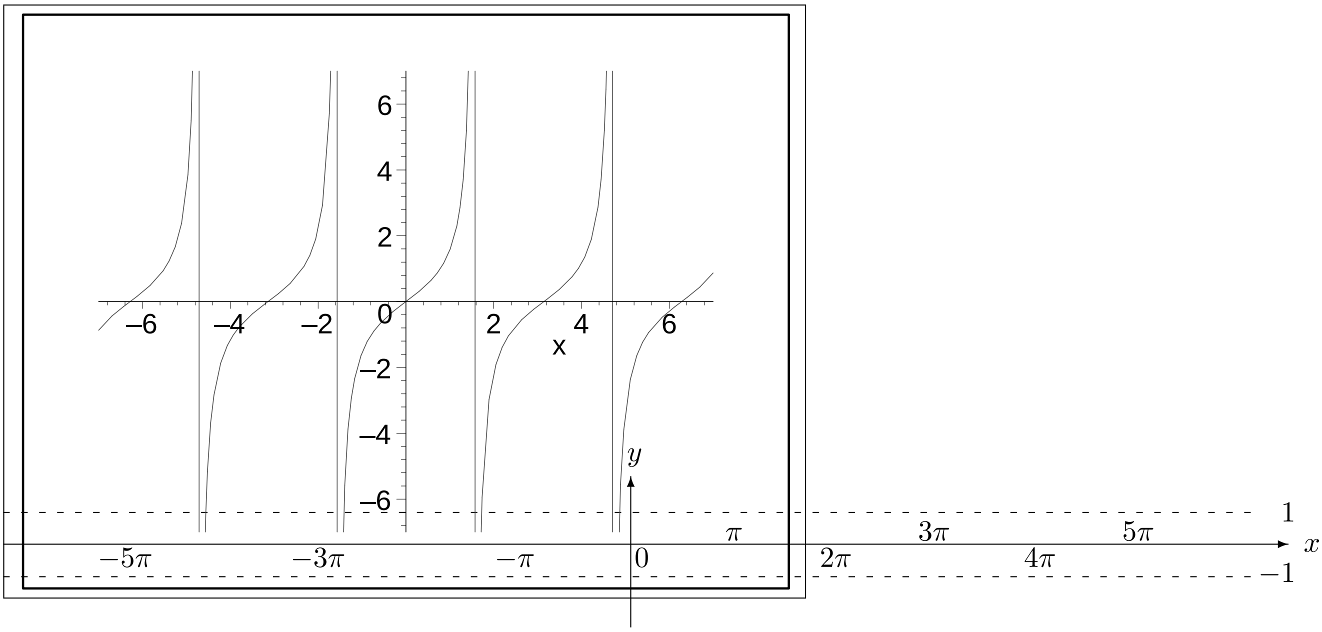


6.3. A tangensfüggvény

Ábrázoljuk az

$$f: \quad \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{tg} x$$

függvényt!


6
4
2
0
–2
–4
–6
–6
–4
–2
2
4
6
x
y
1
−1
x
−5π
−3π
−π
0
π
2π
3π
4π
5π